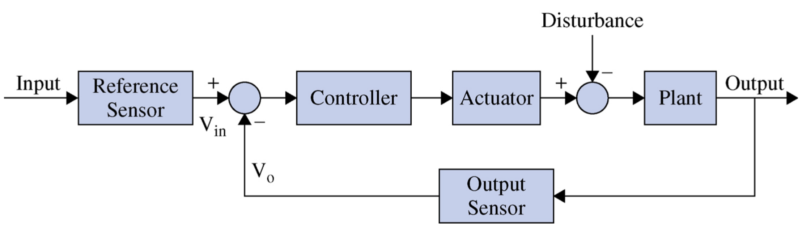
19 블록선도

- 블록선도 모델링은 시스템의 구성요소들의 조합과 결합에 대한 이해를 돕고, 전달함수와 함께 시스템 전체의 인과관계를 표시하는데 사용
- 블록선도는 선형 및 비선형 시스템의 모델링에 사용
- 블록선도의 대표적 구성요소
  - 일반적인 제어시스템을 고려해 보자

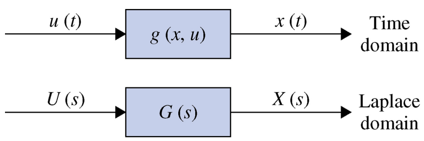


  - 대부분의 제어시스템의 블록선도의 구성요소:
    1. 비교기(comparator)
    2. 각 구성요소의 전달함수를 나타내는 블록 (blocks representing individual component TF)
       a) 기준센서 (혹은 입력센서) [reference sensor (or input sensor)]
       b) 출력센서 (output sensor)
       c) 구동기 (actuator)
       d) 제어기 (controller)
       e) 플랜트 (plant): 제어 대상
    3. 입력 혹은 기준신호(input or reference signals)
    4. 출력신호 (output signals)
    5. 외란신호 (disturbance signal)
    6. 피드백 루프 (feedback loops)

– 블록은 시간영역에서의 시스템에 관한 방정식 혹은 복소영역에서의 전달함수로 나타낸다.

$$x(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$X(s) = G(s)U(s) \qquad \rightarrow \qquad \therefore \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$



- 수학적 방정식과 블록선도의 관계 (Relation b/w Mathematical Equations and Block Diagrams)
  – 대표적인 2차 시스템을 고려해 보자

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$$

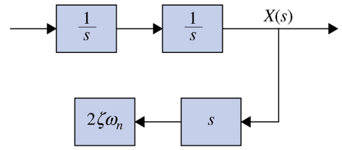
  – 0의 초기조건을 사용하여 전달함수를 얻으면

$$s^2X(s) + 2\zeta\omega_n sX(s) + \omega_n^2X(s) = \omega_n^2U(s)$$

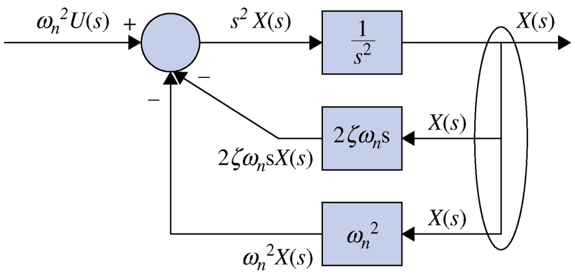
  – s의 최고차항을 기준으로 정리하고, 1/s가 적분연산임을 기억하면서 추가 정리하는 것이 최선의 방법이다.

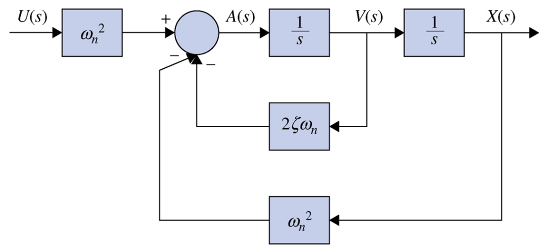
$$s^2X(s) = \omega_n^2U(s) - 2\zeta\omega_n sX(s) - \omega_n^2X(s)$$

- 블록선도 변형 (Block Diagram Reduction)



(a)

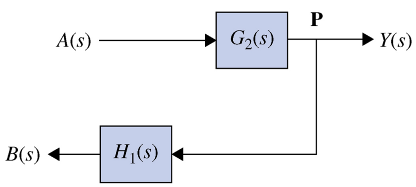




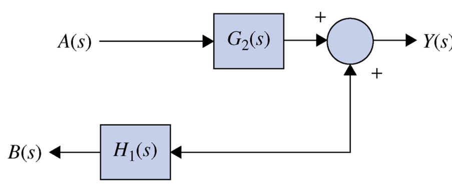
(b)

– 분기점(branch point) P로 부터 Q로 옮김, 그리고 비교기(comparator)를 P로 부터 Q로 옮김

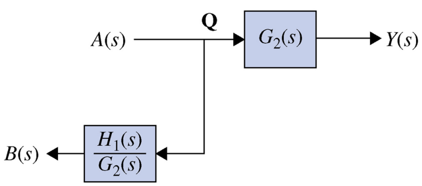
(a)



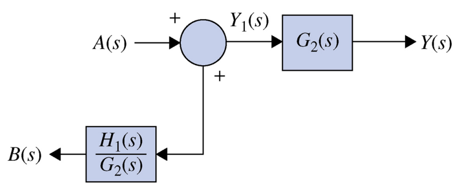
(a)



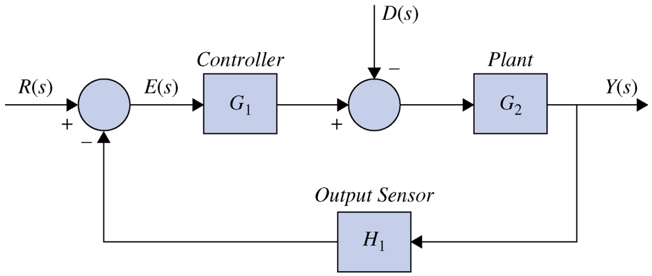
(b)



(b)



- 다중 입력 시스템의 블록선도
  - 입력과 외란이 인가되는 경우를 고려해 보자



– 중첩(superposition):

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= Y_R(s)|_{D=0} + Y_D(s)|_{R=0} \\
&= \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{D(s)=0} R(s) + \left.\frac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R(s)=0} D(s) \\
&= \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H_1}R(s) - \frac{G_2}{1+G_1G_2H_1}D(s)
\end{aligned}
$$

– 전형적인 방법:

$$
\begin{aligned}
Y &= G_2(G_1E - D) \\
&= G_2(G_1(R - H_1Y) - D) \\
&= G_2G_1R - G_2G_1H_1Y - G_2G_1D \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{G_1G_2R - G_2D}{1+G_1G_2H_1}
\end{aligned}
$$

Notice that the same denominator appears if the disturbance goes to the forward path

20 제어시스템의 시간영역 해석 절차

- 각 시스템들의 운동방정식 구하기 (Find the equation of motion w.r.t. the sub-systems)
- 각 시스템들에 라플라스 변환(LT)을 사용하여 전달함수(TF) 얻기 (Find the TF using the LT of the sub-systems)
- 각 시스템 사이의 인터랙션 표시하기 (Use the block diagram or signal flow graph to find the interactions among the system components)
- 제어기를 설계하기
- 전체 시스템의 TF 찾기 (Find the overall TF of the system)
- 역 LT를 사용하여 시간응답 얻기 (Obtain the time response by using inverse LT)

21 시스템의 시간응답 (Time Response of Systems)

- 전형적인 시간응답 = 과도응답 + 정상상태응답

$$\text{time response} = \text{transient response} + \text{steady-state response}$$

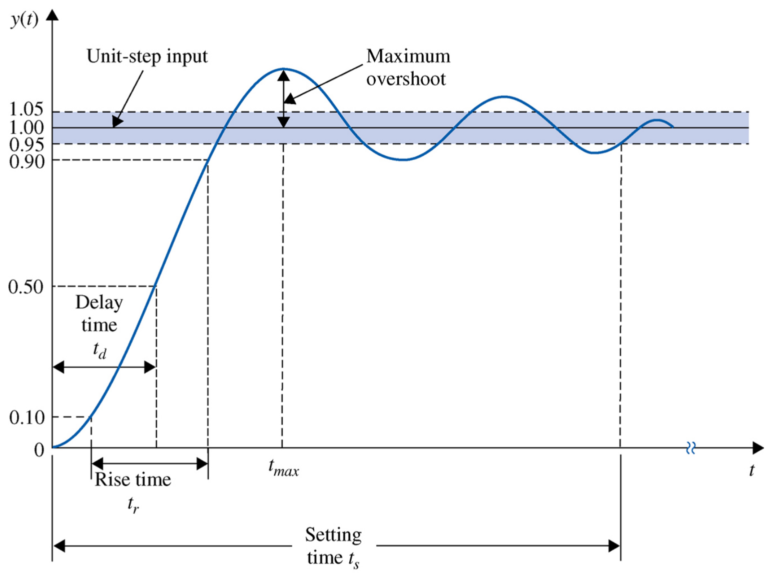
$$\text{complete solution} = \text{homogeneous solution} + \text{particular solution}$$

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

- 과도응답: 시간이 흐름에 따라서 사라지는 응답 ($y_t(t)$: the part of time response that goes to zero as time becomes very large)
- 정상상태응답: 과도응답이 사라진 이후에 남는 응답 ($y_{ss}(t)$: the part of time response that remains after the transient has died out)

22 단위계단응답 (Unit-Step Response)과 5가지 평가지표 (Performance Criteria)

- 단위계단응답: 입력이 단위계단함수일때 제어시스템의 응답 (the response of control system when input is a unit-step function)
- 전형적인 단위계단응답 및 평가지표



1. 최대오버슈트(Maximum Overshoot) (M_p):

$$\text{maximum overshoot} \triangleq y_{max} - y_{ss}$$

종종 최종값에 대한 백분율로 나타내는 경우도 있음.

$$\text{percent maximum overshoot} \triangleq \frac{\text{maximum overshoot}}{y_{ss}} \times 100\%$$

최대오버슈트는 상대안정도(relative stability)를 측정할 때 사용

2. 지연시간 (Delay Time) (t_d): 최종값의 50%에 도달하는 데 필요한 시간
3. 상승시간(Rise Time) (t_r): 최종값의 10%에서 90%에 도달하는 데 필요한 시간 or 0%에서 100% 까지의 상승시간
4. 정착시간 (or 정정시간) (Settling Time) (t_s): 최종값의 특정 백분율 (5% or 3%) 이내에 들어가는 데 필요한 시간
5. 정상상태오차 (Steady-State Error) (e_{ss}): 정상상태에 도달했을 때 오차

- 제어 시스템 설계할 때 주어지는 전형적인 성능목표, for example, $M_p < 10\%$, $t_s < 0.012[s]$, and $e_{ss} < 1\%$.

23 표준형 1차 시스템의 시간응답

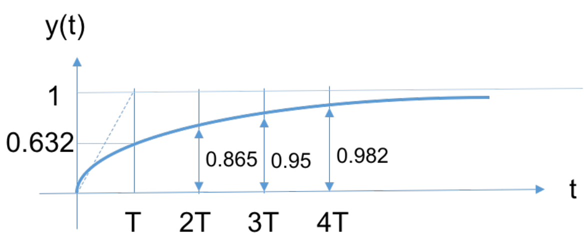
- 1차 시스템

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

  1차 시스템의 예로는 RC회로 시스템, 열전달 시스템 등이 있으며, τ는 시정수를 의미한다.

- 단위계단 응답 ($r(t) = u_s(t)$, $R(s) = \frac{1}{s}$)

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/\tau)}$$
$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0$$



  - 시정수 τ가 작을 수록 시스템 응답은 빨라진다. (그림 상에서 $\tau = T$임에 유의)
  - $t \geq 3\tau$, 시스템의 응답은 최종값의 5% 내에 있다.
  - 응답시간의 적절한 평가기준으로는 응답이 5% 이내에 들어오는데 걸리는 시간 또는 3배의 시정수가 이용.

- 단위램프 응답 ($r(t) = tu_s(t)$, $R(s) = \frac{1}{s^2}$)

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \\
y(t) &= t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0 \\
e(t) &= r(t) - y(t) = \tau(1 - e^{-t/\tau})
\end{aligned}
$$

  - 정상상태 오차는 $e(\infty) = \tau$.
  - 시정수 τ가 작을수록 램프입력에 대한 정상상태 오차는 작아진다.

- 단위임펄스 응답 ($r(t) = \delta(t)$, $R(s) = 1$)

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{(1/\tau)}{s + (1/\tau)} \\
y(t) &= \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

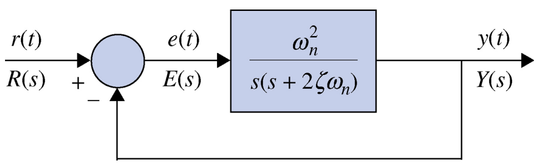
응답 사이의 관계: 위의 3가지 입력 사이에는 도함수 관계가 성립한다.

24 표준형 2차 시스템의 과도응답

- 2차 시스템

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

  - 비감쇠고유진동수 (**undamped natural frequency**): $\omega_n^2 = \frac{K}{J}$
  - 감쇠비 (**damping ratio**): $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$



- 단위계단 응답 ($r(t) = u_s(t)$, $R(s) = \frac{1}{s}$)
  1. 부족감쇠 ($0 < \zeta < 1$) : [감쇠고유진동수 (**damped natural frequency**): $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$]

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \qquad \textbf{where} \quad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned}$$

  - 과도상태의 진동수는 감쇠고유진동수(ω_d)가 되며, 감쇠비(ζ)에 따라 변한다.
  - ζ가 증가하면 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$은 감소한다. $\zeta \geq 1$이면 진동하지 않는다.

2. 임계감쇠 ($\zeta = 1$)

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$
$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \\ &= 1 - (1+\omega_n t)e^{-\omega_n t} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

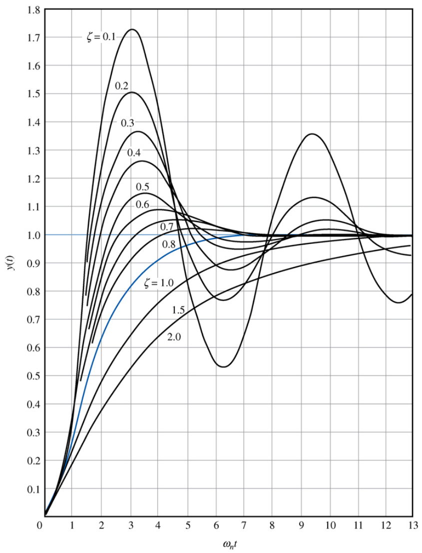
3. 과감쇠 ($\zeta > 1$) [두 음의 실근 $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$]

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\frac{1}{s-\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\frac{1}{s-\lambda_2}$$
$$y(t) = 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)e^{\lambda_2 t}$$

- ζ가 1보다 커지면 두 지수항 중 하나는 다른 것보다 훨씬 빨리 감소하게 된다. 그래서 더 빨리 감소되는 지수항은 무시될 수 있다.
- $0.5 < \zeta < 0.8$ 사이에 있는 부족감쇠 시스템이 임계감쇠 보다 더 빨리 최종값에 도달하게된다.
- 진동이 없는 시스템은 임계감쇠가 가장 빠른 응답을 나타낸다.

- 과도응답 (transient response) 사양: 2차 시스템의 바람직한 과도응답을 위해서는 감쇠비가 0.4∼0.8 정도여야 한다. $\zeta < 0.4$이면 과도한 오버슈트가 발생하고, $\zeta > 0.8$이면 응답이 느려진다.
- 감쇠비와 감쇠인자
특성방정식의 근 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2) = 0$:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &\triangleq -\alpha \pm j\omega_d \end{aligned}$$

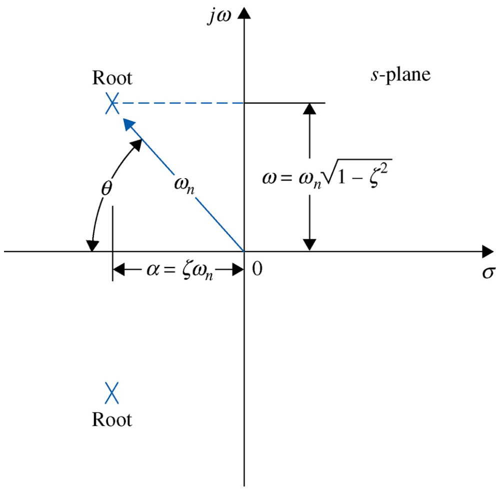


아래 그림 상에서의 $\omega = \omega_d$를 의미함에 주의한다.

1. 감쇠인자(damping factor) $\alpha \triangleq \zeta\omega_n$는 시스템의 시정수(time constant)의 역수에 비례 $\frac{1}{\alpha} \propto \tau$.
2. 감쇠비(damping ratio) ζ

$$\zeta = \text{damping ratio} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{actual damping factor}}{\text{damping factor at critical damping}}$$

- 고유진동수
  - 고유진동수 ω_n : 원점에서 특성방정식의 근(root)까지의 거리
  - 감쇠비 $\zeta = \cos\theta$: 근까지의 선과 음의 실수축 사이 각의 코사인 값
  - 감쇠인자 $\alpha = \zeta\omega_n$: 근의 실수부
  - 감쇠고유진동수 $\omega_d \triangleq \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ for $0 < \zeta < 1$: 근의 허수부
- 봉우리시간 및 최대오버슈트



1. 봉우리시간 (**peak time**) t_p: 응답이 오버슈트 혹은 언더슈트의 봉우리에 도달하는데 걸리는 시간

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = 0$$

$$-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}\sin(\omega_d t_p + \phi) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t_p}\cos(\omega_d t_p + \phi) = 0$$

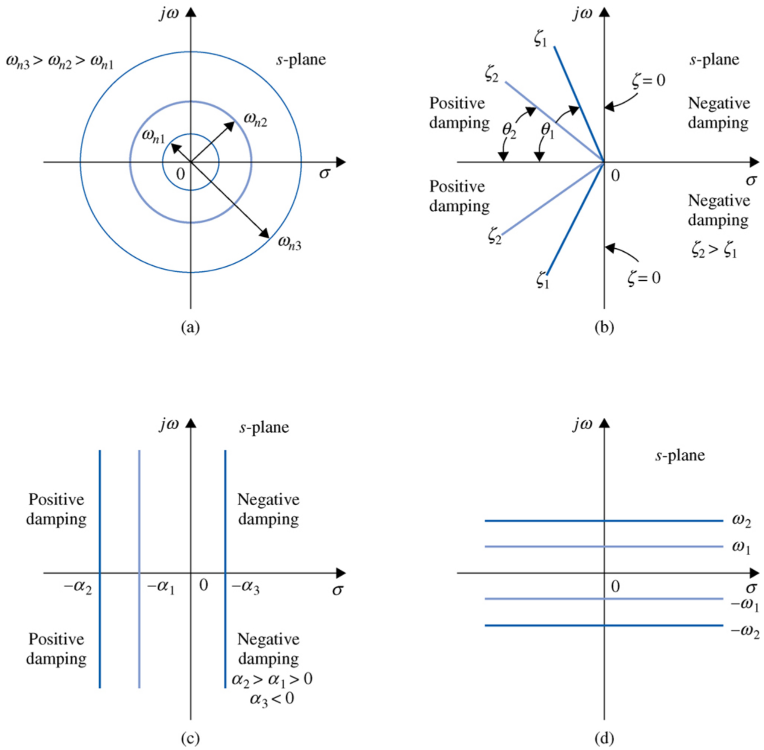
$$\tan(\omega_d t_p + \phi) = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\frac{\tan\omega_d t_p + \tan\phi}{1 - \tan\omega_d t_p \cdot \tan\phi} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\tan\omega_d t_p + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\left(1 - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\tan\omega_d t_p\right)$$

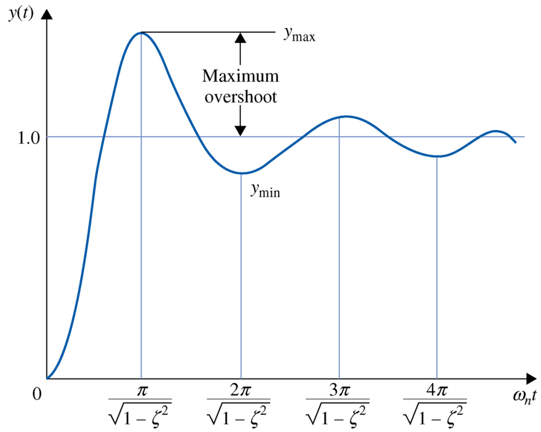
$$\tan\omega_d t_p = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_p = \frac{n\pi}{\omega_d} = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- $n = 1$일때 첫번째 오버슈트 봉우리 시간
- $n = 2$일때 첫번째 언더슈트 봉우리 시간



- $n = 3$일때 두번째 오버슈트 봉우리 시간
- $n = 4$일때 두번째 언더슈트 봉우리 시간

2. 최대 오버슈트 (**maximum overshoot**) M_p: 응답곡선의 최대 봉우리를 정상상태 최종치에서 측정



한 값. 감쇠비에만 의존.

$$
\begin{aligned}
M_p = y(t_p) - 1 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \phi) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin(\pi + \phi) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin(\phi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sqrt{1-\zeta^2} = e^{-\zeta\omega_n t_p} \\
&= e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}
\end{aligned}
$$

3. Notice that M_p is a function of ζ, while t_p (t_{max} in the textbook) is a function of both ω_n and ζ

- 지연시간 (delay time t_d) / 상승시간 (rising time t_r):
  - 지연시간(delay time)을 구하기 위하여, set $y(t_d) = 0.5$ and solve for t_d

$$
y(t_d) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_d + \phi) = 0.5
$$

but the exact solution is dirty, so the approximate equation is used

$$\therefore \qquad t_d \approx \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1$$

– 부족감쇠 2차 시스템에서는 보통 0%에서 100%까지의 상승시간으로 정의

$$y(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \phi) = 1 \qquad \rightarrow \qquad \sin(\omega_d t_r + \phi) = 0$$

$$\omega_d t_r + \phi = \pi \qquad \rightarrow \qquad t_r = \frac{1}{\omega_d}\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

– 어떤 경우 10%에서 90%까지의 상승시간으로 정의하기도 함.

$$y(t_1) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_1 + \phi) = 0.1$$

$$y(t_2) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_2 + \phi) = 0.9$$

$$t_r = t_2 - t_1$$

but the exact solution is dirty, so the approximate equation is used

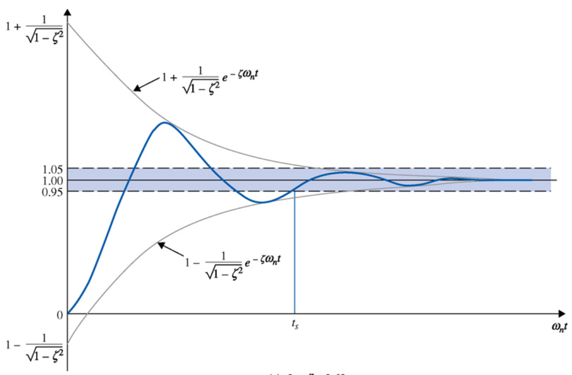
$$\therefore \qquad t_r \approx \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1$$

– 근사식으로 부터 얻어지는 성질
 * t_r과 t_d는 ζ에 비례하고, ω_n에 반비례

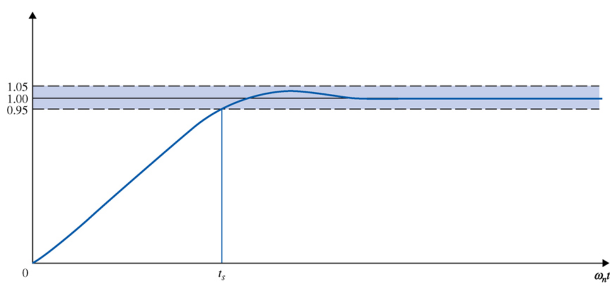
$*$ 고유진동수를 증가(감소)시키면, t_r과 t_d가 감소(증가)한다.

- 정착시간 (**settling time** t_s): 응답 곡선이 최종값의 **2%** 혹은 **5%** 내의 범위에 들어와서 머물게 되는데 걸리는 시간. 이는 시스템의 시정수($\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\alpha}$)와 관련이 있다. $0 < \zeta < 0.69$ 구간에 대해서 아주 정확하지는 않지만 쓸만한 것으로 아래와 같은 식을 사용할 수 있다.

$$t_s \approx 3.2\tau = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \qquad \textbf{for 5 \% criterion}$$



(a) $0 < \zeta < 0.69$



(b) $\zeta > 0.69$

- $0 < \zeta < 0.69$ 구간의 정착시간에 대한 엄밀해를 얻어보자 :

$$1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.05 \qquad \text{:upper bound of unit-step response}$$
$$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.95 \qquad \text{:lower bound of unit-step response}$$

- Solving above for $\omega_n t_s$, we have

$$\therefore \qquad t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln(c_{ts}\sqrt{1-\zeta^2})$$

  where c_{ts} is the "percent set for the settling time", if the threshold is 5%, then $c_{ts} = 0.05$.
- For $\zeta > 0.69$, 정착시간 근사식:

$$t_s \approx \frac{4.5\zeta}{\omega_n}$$

  정착시간이 ζ에 비례하고 ω_n에 반비례임에 유의
- As a result, t_s, t_d, t_r and t_p can be reduced by increasing ω_n, but the maximum overshoot M_p is not related to ω_n (it is related to only ζ).