7. (중요한 참고) 상태천이행렬 (state transition matrix) / 상태천이방정식

a) 동차 (homogeneous) 상태공간 방정식의 해 : $\dot{x} = Ax$
위의 해를 벡터 멱급수 (power series) 형태로 가정해 보자

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots$$

이를 동차 상태공간 방정식에 대입하면

$$c_1 + 2c_2 t + \cdots + kc_k t^{k-1} + \cdots = A[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots]$$

양변 계수 비교를 하면

$$c_1 = Ac_0 \qquad 2c_2 = Ac_1 \qquad 3c_3 = Ac_2 \qquad kc_k = Ac_{k-1}$$

초기 조건 $x(0) = c_0$을 가지고 이를 다시 정리하면

$$c_0 = x(0) \quad c_1 = Ac_0 = Ax(0) \quad c_2 = \frac{1}{2}Ac_1 = \frac{1}{2}A^2x(0) \quad c_3 = \frac{1}{3}Ac_2 = \frac{1}{2\times 3}A^3x(0) \quad c_k = \frac{1}{k!}A^kx(0)$$

그러므로 멱급수 형태의 해를 행렬지수(matrix exponential) 함수로 표현하면

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots\right]x(0) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k\right]x(0) \\ &= e^{At}x(0) \end{aligned}$$

b) Laplace 변환에 의한 동차 방정식의 해 : $\dot{x} = Ax$
Laplace 변환하면

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \qquad \rightarrow \qquad X(s) = [sI - A]^{-1}x(0)$$

Lapalce 역변환하면

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[[sI - A]^{-1}]x(0)$$

여기에서 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$을 이용하면

$$\begin{aligned}[sI - A]^{-1} &= \frac{1}{s}\left[I - \frac{A}{s}\right]^{-1} = \frac{1}{s}\left[I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$를 이용하면,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[[sI - A]^{-1}] &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \\ &= e^{At}\end{aligned}$$

그러므로

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

c) 행렬지수 (matrix exponential) 함수의 특징

- $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
- $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$
- e^{At}의 역행렬은 e^{-At}
- e^{At}는 비특이 행렬 (항상 역행렬 존재) (nonsingular)
- if $AB = BA$, then $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$
- if $AB \neq BA$, then $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$

d) 상태천이 행렬 (state transition matrix) : $\dot{x} = Ax$의 해를 다음과 같이 써보자

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

그러면 다음이 성립해야 한다.

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \qquad \textbf{with} \quad \Phi(0) = I$$

그러므로 우리는 다음의 관계를 알 수 있다

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[[sI - A]^{-1}] \qquad\qquad \Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \Phi(-t)$$

이 방정식의 해는 단순히 초기조건을 변환한 것임. 이런 행렬 $\Phi(t)$를 "상태천이행렬"이라고 한다.

e) 상태천이 행렬의 성질

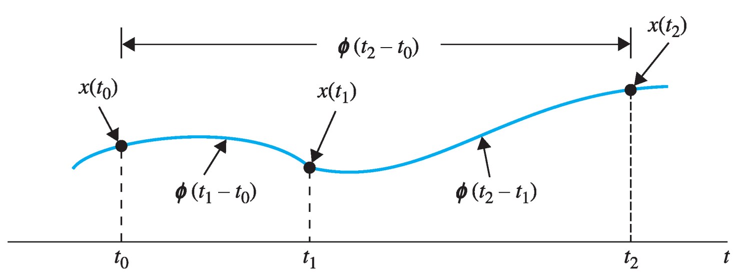
i. $\Phi(0) = I$

ii. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

iii. $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$

iv. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$

v. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$



[그림 10-9] 상태천이행렬의 성질.

f) (Example 1) $\dot{x} = Ax$의 상태천이행렬 $\Phi(t)$를 얻어라?

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \\
\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}[[sI - A]^{-1}] \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

g) 비동차 (nonhomogeneous) 상태공간 방정식의 해 :

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \rightarrow \qquad \dot{x} - Ax = Bu$$

양변에 e^{-At}를 곱하면

$$e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu$$

이를 0에서 t까지 적분하면

$$\begin{aligned} e^{-At}x(t) - x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ \therefore \qquad x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

상태천이행렬을 사용하면

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

h) Laplace 변환법에 의한 비동차 상태공간 방정식의 해 : $\dot{x} = Ax + Bu$
Laplace 변환을 취하면

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ [sI - A]X(s) &= x(0) + BU(s) \\ X(s) &= [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$ 이므로,

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{At}]x(0) + \mathcal{L}[e^{At}]BU(s)$$

마지막 항이 곱으로 Laplace 역변환하면 상승적분이 되므로,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

i) **(Example 2)** $\dot{x} = Ax + Bu$의 단위계단 입력에 대한 응답?

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

먼저 **(Example 1)**에서 얻은 $\Phi(t) = e^{At}$를 활용하자.

$$e^{At} = \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[[sI - A]^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \textbf{for} \quad t \geq 0$$

둘째로

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1d\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \Bigg|_0^t \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -1 + 1 + e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \textbf{for} \quad t \geq 0
\end{aligned}$$