1.1 Bode Plot Techniques

- $G(j\omega)$의 보데 선도는 **2개의 도면으로 구성:**
  - 크기선도 **(the magnitude** $20\log_{10}|G(j\omega)|$ **in decibels (dB) vs** $\log_{10}\omega$**)** : 보데 선도에서 $G(j\omega)$의 크기는 **dB**로 표현하고 $G(j\omega)$의 곱과 나누기는 각각 합과 차가 된다.
  - 위상선도 **(the phase of** $\angle G(j\omega)$ **in degrees vs** $\log_{10}\omega$**)**: 보데 선도에서 $G(j\omega)$의 위상관계도 역시 대수적으로 합과 차가 된다.

- Consider the following equation:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{s+a}{(s+b)(s+c)} \\
G(j\omega) &= \frac{j\omega+a}{(j\omega+b)(j\omega+c)} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+\omega^2}e^{j\tan^{-1}\frac{\omega}{a}}}{\sqrt{b^2+\omega^2}e^{j\tan^{-1}\frac{\omega}{b}}\sqrt{c^2+\omega^2}e^{j\tan^{-1}\frac{\omega}{c}}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{b^2+\omega^2}\sqrt{c^2+\omega^2}}\right)e^{j\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{a}-\tan^{-1}\frac{\omega}{b}-\tan^{-1}\frac{\omega}{c}\right)} \\
20\log_{10}|G(j\omega)| &= 20\log_{10}\left(\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{b^2+\omega^2}\sqrt{c^2+\omega^2}}\right) \\
&= 20\log_{10}\sqrt{a^2+\omega^2} - 20\log_{10}\sqrt{b^2+\omega^2} - 20\log_{10}\sqrt{c^2+\omega^2} \\
\angle G(j\omega) &= \tan^{-1}\frac{\omega}{a} - \tan^{-1}\frac{\omega}{b} - \tan^{-1}\frac{\omega}{c}
\end{aligned}
$$

- **(Example) Consider**

$$G(s) = \frac{K(1+T_1 s)}{s(1+T_a s)(1+2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)} \qquad \textbf{with} \quad K > 0$$

$$\begin{aligned}
|G(j\omega)|_{dB} &= 20\log_{10}|G(j\omega)| \\
&= 20\log_{10}\left|\frac{K(1+j\omega T_1)}{j\omega(1+j\omega T_a)(1+2j\omega\zeta/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2)}\right| \\
&= 20\log_{10}|K| + 20\log_{10}|1+j\omega T_1| - 20\log_{10}|j\omega| - 20\log_{10}|1+j\omega T_a| - 20\log_{10}|1+2j\omega\zeta/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2| \\
&= 20\log_{10}|K| + 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \\
&\qquad - 20\log_{10}|\omega| - 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2 T_a^2} - 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\
\angle G(j\omega) &= \angle K + \angle(1+j\omega T_1) - \angle j\omega - \angle(1+j\omega T_a) - \angle(1+2j\omega\zeta/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2) \qquad [rad] \\
&= 0 + \tan^{-1}(\omega T_1) - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega T_a) - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \qquad [rad]
\end{aligned}$$

- $G(j\omega)$의 기본 인자 4가지:
  1. 실수 상수 (이득): K
     - 이득 K에 대한 로그스케일 크기곡선은 $20\log K$ [dB]의 수평직선이다
     - 이득 K가 10배 증가하면 대응하는 dB값은 20배 증가한다.

$$K_{dB} = 20\log_{10} K = \textbf{constant}$$

$$\angle K = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ -180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

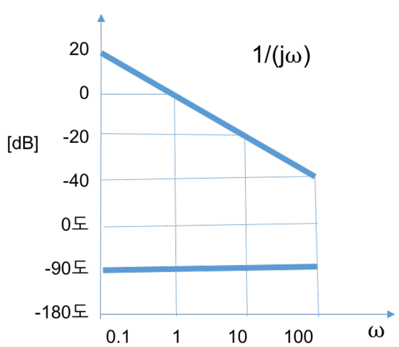
2. 원점에 있는 극과 영점 (적분 및 미분 인자): $s^{\mp 1}$ **and** $s^{\mp n}$

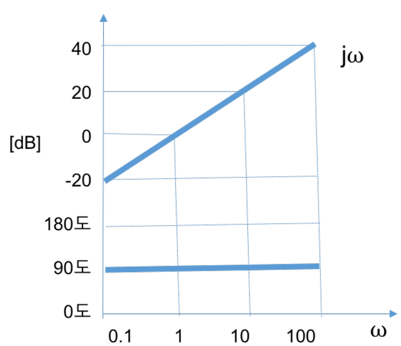
- $\frac{1}{j\omega}$ (원점에 극, 적분인자): 크기선도의 직선의 기울기는 **-20 [dB/decade]**이 된다.

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log|w| \;\; [dB] \qquad\qquad \angle\frac{1}{j\omega} = -90^\circ$$

- $j\omega$ (원점에 영점, 미분인자): 크기선도의 직선의 기울기는 **20 [dB/decade]**이 된다.

$$20\log|j\omega| = 20\log|w| \;\; [dB] \qquad\qquad \angle j\omega = 90^\circ$$





- $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$ (원점에 **n**개의 극): 크기선도의 직선의 기울기는 $-20 \times n$ **[dB/decade]**이 된다.

$$20\log\left|\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n\right| = -20n\log|w| \;\; [dB] \qquad\qquad \angle\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n = -90^\circ \times n$$

- $(j\omega)^n$ (원점에 **n**개의 영점): 크기선도의 직선의 기울기는 $20 \times n$ **[dB/decade]**이 된다.

$$20\log|(j\omega)^n| = 20n\log|w| \;\; [dB] \qquad\qquad \angle(j\omega)^n = 90^\circ \times n$$

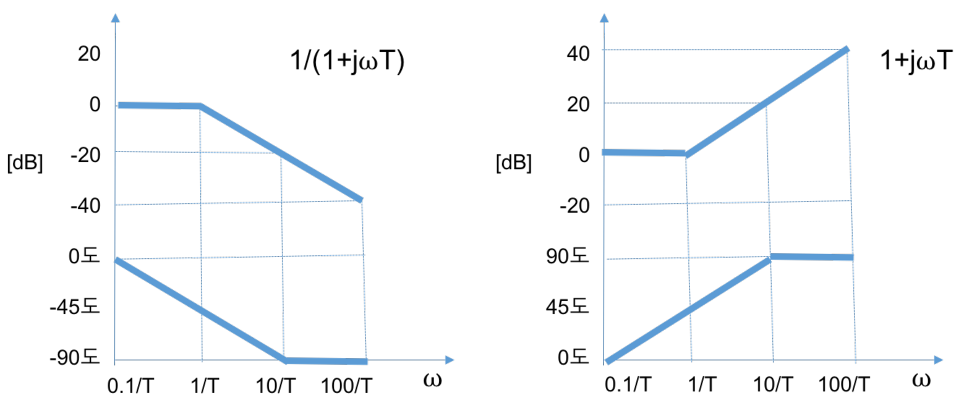
3. 단순극 및 단순 영점 (1차 인자): $(1+sT)^{\mp 1}$

– 단순극: $\frac{1}{1+j\omega T}$

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} = \begin{cases} 0[dB] & if \quad \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20\log\sqrt{2} = -3[dB] & if \quad \omega = \frac{1}{T} \\ -20\log \omega T[dB] & if \quad \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$\angle\frac{1}{1+j\omega T} = -\tan^{-1}\omega T = \begin{cases} 0^\circ & if \quad \omega \ll \frac{1}{T} \\ -45^\circ & if \quad \omega = \frac{1}{T} \\ -90^\circ & if \quad \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

* $\omega = \frac{1}{T}$를 보데 선도의 절점주파수 (**corner frequency, break point**)라고 한다.
* $0 < \omega < \frac{0.1}{T}$ 구간에 대해서, 크기 **0[dB]**이고, 위상각 **0**도이다.
* $\frac{0.1}{T} < \omega < \frac{1}{T}$ 구간에 대해서, 크기 $0 \sim -3$**[dB]**이고, 위상각 $0 \sim -45$도까지 감소한다.
* $\frac{1}{T} < \omega < \frac{10}{T}$ 구간에 대해서, 크기 $-3 \sim -20$**[dB]**이고, 위상각 $-45 \sim -90$도까지 감소한다.
* $\frac{10}{T} < \omega < \infty$ 구간에 대해서, 크기선도는 **-20[dB]/decade**의 기울기를 가지며, 위상각은 **-90**도에 머물러 있다.



- 단순영점: $1 + j\omega\tau$

$$20\log|1+j\omega\tau| = 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = \begin{cases} 0[dB] & if \quad \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 20\log\sqrt{2} = 3[dB] & if \quad \omega = \frac{1}{\tau} \\ 20\log\omega\tau[dB] & if \quad \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\angle 1 + j\omega\tau = \tan^{-1}\omega\tau = \begin{cases} 0^\circ & if \quad \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 45^\circ & if \quad \omega = \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & if \quad \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

Figure 6.7
Magnitude plot for $j\omega\tau + 1$; $\tau = 10$

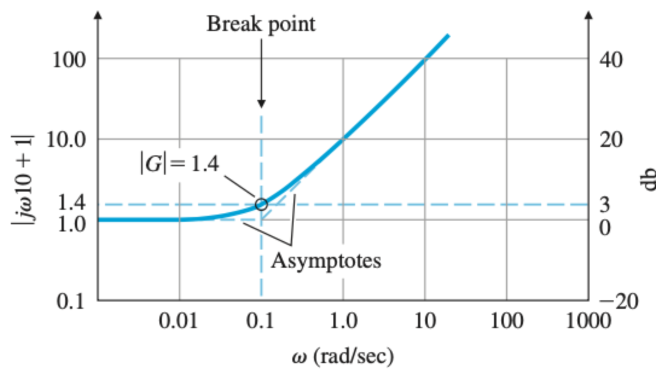
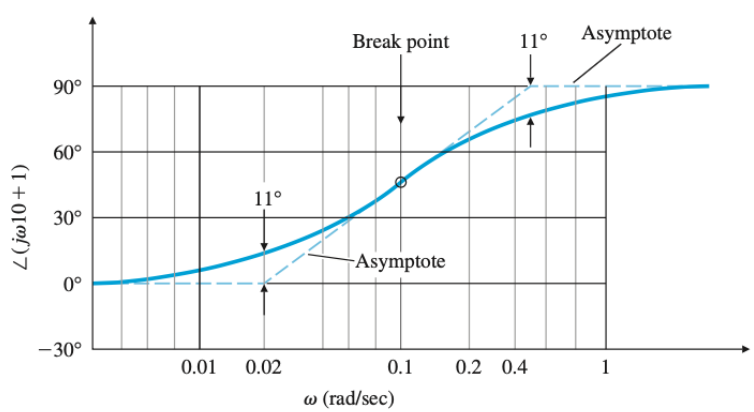


Figure 6.8
Phase plot for $j\omega\tau + 1$; $\tau = 10$



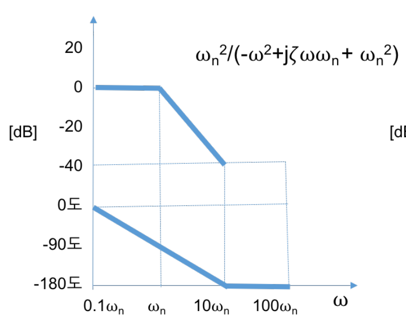
4. 2차 극과 영점 (2차 인자): $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ **and** $\frac{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$, $\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)j-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ **and** $1+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)j-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

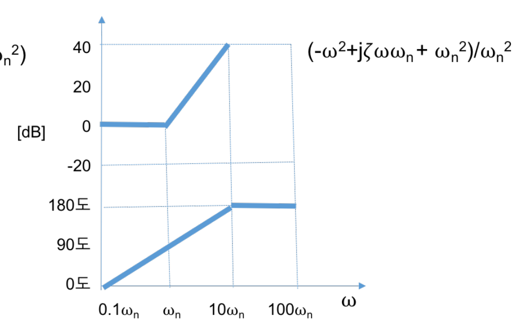
- 만약 $\zeta \geq 1$이면, 2차인자는 2개의 1차인자의 곱으로 표현된다. (이는 1차인자 합의 해석과 동일)
- 만약 $0 < \zeta < 1$이면, 2차인자는 2개의 복소극 인자의 곱이 된다. (2개의 복소수근을 가지는 경우)

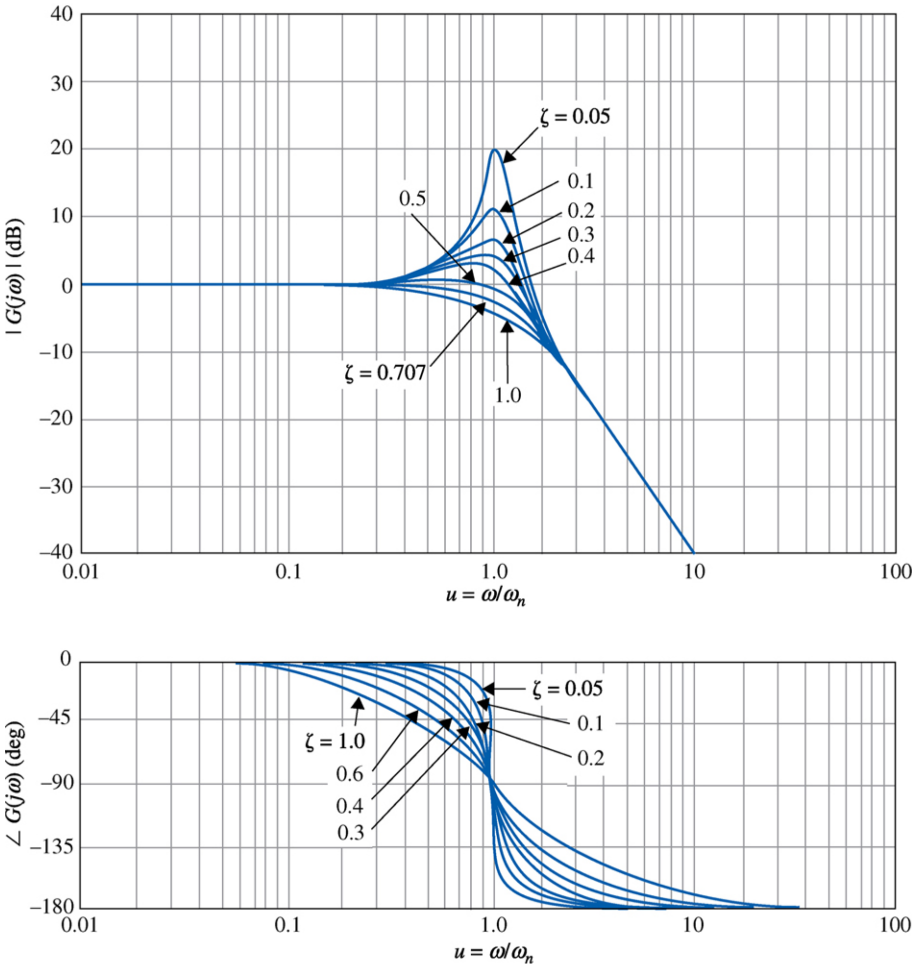
$$-20\log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \begin{cases} 0[dB] & if \quad \omega \ll \omega_n \\ -20\log 2\zeta[dB] & if \quad \omega = \omega_n \\ -40\log\frac{\omega}{\omega_n}[dB] & if \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$-\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = \begin{cases} 0^\circ & if \quad \omega \ll \omega_n \\ -90^\circ & if \quad \omega = \omega_n \\ -180^\circ & if \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

* $0 < \omega < 0.1\omega_n$ 구간에 대해서, 크기 **0[dB]**이고, 위상각 **0**도이다.
* $0.1\omega_n < \omega < \omega_n$ 구간에 대해서, 크기 $0 \sim -20\log 2\zeta$**[dB]**이고, 위상각 $0 \sim -90$도까지 감소.
* $\omega_n < \omega < 10\omega_n$ 구간에 대해서, 크기 $-20\log 2\zeta \sim -40$**[dB]**이고, 위상각 $-90 \sim -180$도까지 감소한다.
* $10\omega_n < \omega < \infty$ 구간에 대해서, 크기선도는 **-40[dB]/decade**의 기울기를 가지며, 위상각은 **-180**도에 머물러 있다.






40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
| G(jω) | (dB)
ζ = 0.05
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ζ = 0.707
1.0
0.01
0.1
1.0
10
100
u = ω/ωn
0
−45
−90
−135
−180
∠ G(jω) (deg)
ζ = 0.05
0.1
0.2
ζ = 1.0
0.6
0.4
0.3
0.01
0.1
1.0
10
100
u = ω/ωn

– 2개의 복소 영점을 가지는 경우

$$20\log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \begin{cases} 0[dB] & if \quad \omega \ll \omega_n \\ 20\log 2\zeta[dB] & if \quad \omega = \omega_n \\ 40\log\frac{\omega}{\omega_n}[dB] & if \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = \begin{cases} 0^\circ & if \quad \omega \ll \omega_n \\ 90^\circ & if \quad \omega = \omega_n \\ 180^\circ & if \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

– 2차 인자의 근사 보데선도