제 6 장

The Frequency-Response Design Method

1 Frequency Response

- A linear system's response to sinusoidal inputs $u(t) = A\sin\omega_o t \cdot 1(t)$ or $u(t) = A\sin\omega_o t$ for $t \geq 0$
- (Definition of frequency response) Consider a system described by

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \qquad \text{with} \quad U(s) = \frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2} \qquad \text{and} \quad G(s) = K\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Assume $G(s)$ has stable distinct simple poles, then we can apply partial fraction expansion

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2} = K\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2} \\ &= \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n} + \frac{\alpha_0}{s+j\omega_o} + \frac{\alpha_0^*}{s-j\omega_o} \\ y(t) &= \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t} + \alpha_0 e^{-j\omega_o t} + \alpha_0^* e^{j\omega_o t} \qquad \text{for } t \geq 0 \end{aligned}$$

where

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= G(s)\frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2}(s+j\omega_o)\bigg|_{s=-j\omega_o} = G(s)\frac{A\omega_o}{s-j\omega_o}\bigg|_{s=-j\omega_o} = G(-j\omega_o)\frac{A}{-2j} = Me^{-j\phi}\frac{A}{-2j} \\
\alpha_0^* &= G(s)\frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2}(s-j\omega_o)\bigg|_{s=j\omega_o} = G(s)\frac{A\omega_o}{s+j\omega_o}\bigg|_{s=j\omega_o} = G(j\omega_o)\frac{A}{2j} = Me^{j\phi}\frac{A}{2j}
\end{aligned}
$$

using $G(j\omega_o) = Me^{j\phi}$ with $M = |G(j\omega_o)|$ and $\phi = \angle G(j\omega_o)$.

$$
\begin{aligned}
\text{magnitude} \qquad & M = |G(j\omega_o)| = \sqrt{Re[G(j\omega_o)]^2 + Im[G(j\omega_o)]^2} \\
\text{phase} \qquad & \phi = \angle G(j\omega_o) = \tan^{-1}\frac{Im[G(j\omega_o)]}{Re[G(j\omega_o)]}
\end{aligned}
$$

Since system is stable, the transient response will die out and the steady-state response becomes

$$
\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= \alpha_0 e^{-j\omega_o t} + \alpha_0^* e^{j\omega_o t} \\
&= AM\frac{e^{-j\phi}e^{-j\omega_o t}}{-2j} + AM\frac{e^{j\phi}e^{j\omega_o t}}{2j} \\
&= AM\frac{e^{j(\omega_o t+\phi)} - e^{-j(\omega_o t+\phi)}}{2j} \\
&= AM\sin(\omega_o t+\phi) \qquad \text{for} \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

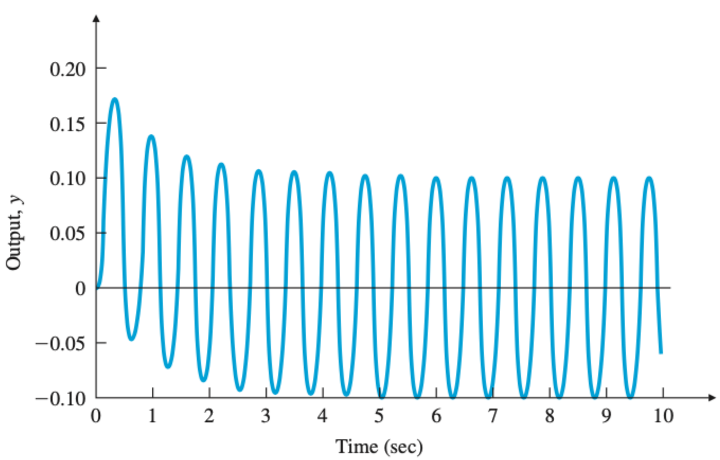
- **(Example)** 시스템 $G(s) = \frac{1}{s+1}$에 사인파 입력 $u(t) = \sin \omega_o t$가 인가될 때의 정상상태 출력 ?

$$M(\omega_o) = |G(j\omega_o)| = \frac{1}{\sqrt{\omega_o^2 + 1}} \qquad \phi(\omega_o) = \angle G(j\omega_o) = -\tan^{-1}\omega_o$$

$$\therefore \quad y_{ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_o^2+1}} \sin(\omega_o t - \tan^{-1}\omega_o)$$

When $\omega_o = 10[rad/s]$**, we have**

$$\therefore \quad y_{ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{101}} \sin(10t - 84.3^\circ)$$



- (Example 6.1) For given capacitor system, if the voltage input $v(t) = \sin \omega_o t$ is applied, then find the current $i_{ss}(t)$ at the steady-state?

  1. Capacitor system

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{I(s)}{V(s)} = G(s) = Cs$$

  2. Magnitude and Phase of the system

$$M = |G(j\omega_o)| = |Cj\omega_o| = C\omega_o$$
$$\phi = \angle G(j\omega_o) = \angle Cj\omega_o = 90^\circ$$

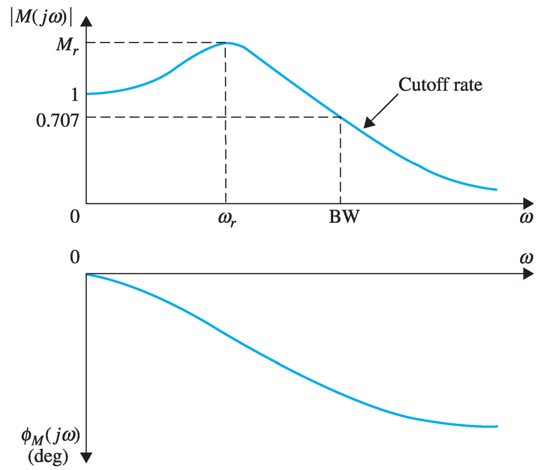
  3. Thus we have the steady-state current as follows:

$$\therefore \qquad i_{ss}(t) = M\sin(\omega_o t + \phi) = C\omega_o \sin(\omega_o t + 90^\circ)$$

  4. Note that the magnitude is proportional to the input frequency ω_o while the phase is independent of frequency ω_o.

- How to determine the frequency response experimentally
  (1) Excite the system with a sinusoid varying in frequency.
  (2) The magnitude $M(\omega)$ is obtained by measuring the ratio of the output sinusoid to input sinusoid in the steady-state at each frequency.
  (3) The phase angle $\phi(\omega)$ is the measured difference in phase between input and output signals.

- Specifications of frequency response
  - Resonant peak (공진 봉우리 M_r) : $|M(\omega)|$의 최대치, M_r은 시간영역에서 계단응답의 최대오버슈트에 대응. 대부분의 제어시스템에서 $1.1 < M_r < 1.5$이 바람직.
  - Resonant frequency (공진 주파수 ω_r) : 공진봉우리 M_r이 일어나는 주파수
  - Bandwidth (대역폭 ω_{BW}) : $|M(\omega)|$의 크기가 주파수 0일때 값의 70.7% 혹은 -3dB 떨어질 때의 주파수, 큰 대역폭은 더 빠른 상승시간을 의미하고, 더 높은 주파수 신호들을 쉽게 통과시킴.



[그림 8-2] 피드백 제어시스템의 전형적인 이득-위상 특성.

- 표준형 2차 시스템의 공진봉우리 M_r, 공진주파수 ω_r, 대역폭 ω_{BW}

1. 전형적인 2차 전달 함수의 크기:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2} \qquad \rightarrow \qquad |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}$$

2. $G(j\omega)$가 어떤 주파수에서 최댓값을 가지게 되면, 이 주파수를 공진주파수라 한다.
   이는 $g(\omega) \triangleq \left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2$이 최소가 될 때 생긴다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(\omega)}{d\omega} &= 2\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 2\left(2\zeta\omega_n\omega\right)\left(2\zeta\omega_n\right)\\ &= 4\omega^3 - 4\omega_n^2\omega + 8\zeta^2\omega_n^2\omega\\ &= 4\omega(\omega^2 - \omega_n^2 + 2\zeta^2\omega_n^2) = 0 \qquad\qquad \therefore \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \textbf{for } 0 \le \zeta \le 0.707\end{aligned}$$

3. 공진주파수에서의 공진 봉우리 M_r은 다음과 같다

$$\therefore \qquad M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_r^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega_r)^2}} \qquad\qquad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{4\omega_n^4\zeta^4+4\zeta^2\omega_n^4(1-2\zeta^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^4+\zeta^2-2\zeta^4}}$$

$$= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

여기서 $\zeta > 0.707$이면, $M_r = 1$ 이고, $\omega_r = 0$ 임에 유의. (참고) 시간영역에서 단위계단 입력에 대한 응답에서의 최대 오버슈트 M_p와 감쇠고유진동수 ω_d와 비교

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad\qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

4. 대역폭 ω_{BW}는 $|M(j\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 에서 얻어짐

$$|M(j\omega_{BW})| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_{BW}^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega_{BW})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \rightarrow \qquad \omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

5. 2차 시스템의 시간영역 응답과 주파수 영역 특성 사이에는 다음의 관계들이 성립
   - M_r은 ζ에만 의존. ζ가 증가하면 M_r은 감소한다. 시간영역에서 최대 오버슈트 역시 ζ에만 의존.
   - $\zeta \geq 0.707$ 에서 $M_r = 1$이고 $\omega_r = 0$이다. 시간영역에서 $\zeta \geq 1$에서는 최대오버슈트가 0이다.
   - 대역폭은 ω_n에 직접 비례. 고정된 ω_n에서 대역폭은 ζ의 증가에 따라 감소한다. 대역폭과 상승시간은 서로 반비례한다.