10 부분분수 전개에 의한 역라플라스 변환

- $G(s)$가 단순 극(simple poles)만을 가질 때

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

where $s_1 \neq s_2 \neq \cdots \neq s_n$

$$G(s) = \frac{K_{s_1}}{s+s_1} + \frac{K_{s_2}}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_{s_n}}{s+s_n}$$

in which

$$K_{s_1} = \left[(s+s_1)\frac{Q(s)}{P(s)}\right]\Bigg|_{s=-s_1} = \frac{Q(-s_1)}{(s_2-s_1)(s_3-s_1)\cdots(s_n-s_1)}$$

- $G(s)$가 중근(multiple-order poles)을 가질 때

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_{n-r})(s+s_i)^r}$$

then $G(s)$ can be expanded as

$$G(s) = \frac{K_{s_1}}{s+s_1} + \frac{K_{s_2}}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_{s_{n-r}}}{s+s_{n-r}} + \frac{A_1}{s+s_i} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r}$$

where

$$
\begin{aligned}
A_r &= \left.\left[(s+s_i)^r G(s)\right]\right|_{s=-s_i} \\
A_{r-1} &= \left.\frac{d}{ds}\left[(s+s_i)^r G(s)\right]\right|_{s=-s_i} \\
A_{r-2} &= \left.\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+s_i)^r G(s)\right]\right|_{s=-s_i} \\
&\vdots \\
A_1 &= \left.\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s+s_i)^r G(s)\right]\right|_{s=-s_i}
\end{aligned}
$$

- $G(s)$가 단순 복소극 (simple complex-conjugate poles)을 가질 때, 다음에서 복소 극을 가진다면

$$
s = -\sigma + j\omega \quad \text{and} \quad s = -\sigma - j\omega
$$

Then

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left.(s+\sigma-j\omega)G(s)\right|_{s=-\sigma+j\omega} \\
K_2 &= \left.(s+\sigma+j\omega)G(s)\right|_{s=-\sigma-j\omega}
\end{aligned}
$$

Thus we have

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_1}{s+\sigma-j\omega} + \frac{K_2}{s+\sigma+j\omega} \\
g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= K_1 e^{-\sigma t + j\omega t} + K_2 e^{-\sigma t - j\omega t} \\
&= e^{-\sigma t}\left[K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}\right]
\end{aligned}
$$

위의 양변의 부호에 따라서 다음을 이용하라

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \qquad \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

11 선형상미분방정식의 라플라스 변환 해법 (시불변 시스템의 해),

- 예를 들어,

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \qquad \textbf{with} \quad x(0) = a \qquad \dot{x}(0) = b$$

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 0$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{as + 3a + b}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{2a + b}{s + 2} + \frac{-a - b}{s + 1} \\ \therefore \qquad x(t) &= (2a + b)e^{-2t} - (a + b)e^{-t} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

- 1차 표준 시스템 (First-order prototype system)

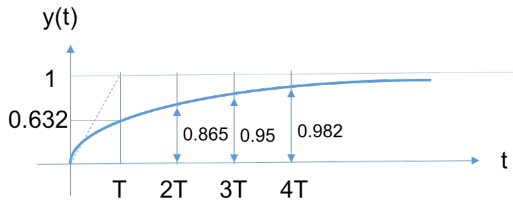
$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

여기서 τ는 시스템의 응답속도를 나타내는 시상수 (time constant: measure of how fast the system responds to initial conditions of external excitations)
단위계단 응답 ($f(t) = u_s(t)$, $F(s) = \frac{1}{s}$)

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/\tau)}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \qquad \textbf{for} \quad t \geq 0$$

  - 시정수 τ가 작을 수록 시스템 응답은 빨라진다.
  - $t \geq 4\tau$, 시스템의 응답은 최종값의 2% 내에 있다.



- 응답시간의 적절한 평가기준으로는 응답이 2% 이내에 들어오는데 걸리는 시간 또는 4배의 시정수가 이용된다.

- 2차 표준시스템(Second-order prototype system)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 f(t)$$

여기서 ζ는 감쇠비(damping ratio), ω_n는 고유진동수(natural frequency)
부족감쇠 $(0 < \zeta < 1)$일 때 단위계단 응답 ($f(t) = u_s(t)$, $F(s) = \frac{1}{s}$)

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\
y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \qquad \textbf{where} \quad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}
\end{aligned}$$

감쇠고유진동수 (damped natural frequency)는 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$임에 유의

- 과도상태의 진동수는 감쇠고유진동수(ω_d)가 되며, 감쇠비(ζ)에 따라 변한다.
- ζ가 증가하면 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$은 감소한다. $\zeta \geq 1$이면 진동하지 않는다.

12 선형시스템의 임펄스 응답과 전달함수

- 임펄스 응답:
  - 전달함수에서 입력이 $U(s)$일때, 출력 $Y(s)$는 복소영역에서의 전달함수와 입력의 곱으로 나타난다. 또한 이는 시간영역에서는 상승적분으로 나타난다.

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

  - 입력이 임펄스 함수 일때 $U(s) = 1, u(t) = \delta(t)$, 얻어지는 출력을 임펄스 응답함수라고 한다.

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\cdot 1 \\ &= G(s) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= g(t) \end{aligned}$$

  - 임펄스 응답함수 $g(t)$는 초기조건이 0일때, 단위임펄스입력에 대한 선형시스템 응답이다. 이 함수를 Laplace변환하면 전달함수가 된다.

$$\mathcal{L}[\text{임펄스 응답함수}] = \text{전달함수} \qquad \mathcal{L}^{-1}[\text{전달함수}] = \text{임펄스 응답함수}$$

  - 2차 표준시스템에 대한 단위임펄스 응답 (입력 $f(t) = \delta(t)$, $F(s) = 1$)

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = G(s)$$

부족감쇠 ($0 < \zeta < 1$)라고 가정하면,

$$Y(s) = G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

- 전달함수 (transfer function) 에 대한 주석 : $G(s) = \frac{Output(s)}{Input(s)}$
  - 전달함수는 선형 시불변시스템에만 적용되며, 모든 초기조건이 0이라는 가정하에서 얻어진다
  - 전달함수는 수학적 모델의 일종으로, 입력변수와 출력변수 사이의 미분방정식으로 다른 연산 형태로 표시한 것이다
  - 전달함수는 그 자체의 특성이기 때문에 입력의 성질이나 크기에는 무관하다.
  - 전달함수는 시스템의 물리적 구조에 관한 정보를 담고 있지는 않다. (물리 시스템이 다르더라도 전달함수는 같을 수 있다)
  - 전달함수가 주어지면 여러가지 입력에 대한 출력(응답)을 연구하여 시스템의 성질을 이해할 수 있다.
  - 전달함수를 모를 경우, 실험적으로 주어진 입력에 대한 출력을 구함으로서 전달함수를 구할 수 있다.
- Proper 전달함수
  - strictly proper: 전달함수의 분모 다항식의 차수가 분자의 차수보다 클 때 ($n > m$)
  - proper: $n \geq m$
  - improper: $m > n$
- 특성방정식(characteristic equation): 전달함수의 분모다항식을 0으로 놓아 얻어지는 방정식

13 선형제어시스템의 안정도

- 절대안정도(absolute stability) : 시스템이 안정한가 불안정한가하는 조건만을 제시
- 상대안정도(relative stability) : 시스템이 어느정도 안정한가를 판단
- 제어시스템의 안정도는 시스템의 응답으로 판단할 수 있다.
  시스템의 응답 = 영상태응답(zero-state response) + 영입력응답(zero-input response)
  - 영상태응답: 입력만에 의한 응답으로 시스템의 모든 초기조건은 영이다
  - 영입력응답: 초기조건만에 의한 응답으로 이 때 모든 입력은 영이다.

14 유한입력 유한출력 (BIBO) 안정도

- 초기조건이 0일때, 만일 유한한 입력에 대해서 출력이 유한하다면 이를 BIBO이라고 한다. (the system is said to be “BIBO stable” or simply “stable”, if its output $y(t)$ is bounded to a bounded input $u(t)$). 아래와 같은 일반적인 시스템을 고려해 보자

$$y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

- 양변에 절대값을 취하면

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left|\int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau\right| \\
&\le \int_0^\infty |u(t-\tau)||g(\tau)|d\tau \qquad \textbf{if} \quad |u(t)| \le M \\
&\le M\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < N \qquad \textbf{if it is BIBO stable}
\end{aligned}$$

- 시스템이 BIBO 안정하다면, 다음과 같은 조건이 성립한다.

$$\therefore \qquad \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le Q = \frac{N}{M} < \infty$$

(해석) 시스템이 BIBO 안정하다면, $|g(\tau)|$ 대 τ 곡선 아래 면적이 유한하여야 한다.

15 특성방정식 근과 안정도의 관계

- BIBO 안정성을 위해서는 특성방정식의 근(전달함수의 극)이 s평면의 우반면이나 $j\omega$축상에 놓이지 않아야 한다. 예를 들어

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$s = \sigma$에서 극(특성방정식의 근)을 가진다고 해보자

$$|G(\sigma)| = \infty \leq \int_0^\infty |g(t)||e^{-\sigma t}|dt$$

- 만약에 $\sigma > 0$, 모든 t에 대해서 $|e^{-\sigma t}| \leq 1$ 이므로,

$$\infty \leq \int_0^\infty |g(t)|dt$$

우반면에 극을 가지면 BIBO 안정성을 위반한다. 즉 불안정하다.

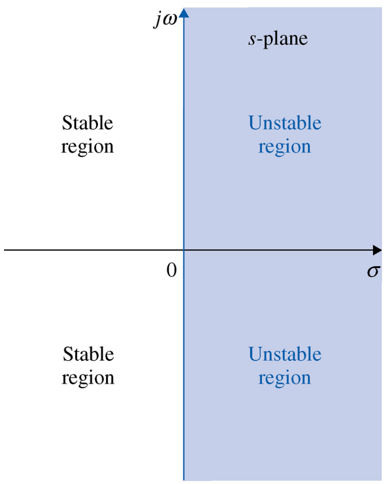
16 영입력안정도와 점근적 안정도

- 영입력안정도(zero-input stability): 입력이 0이고 시스템이 오직 초기조건만으로 구동될 때 안정도
- 점근적안정도(asymptotic stability): 시간이 무한대로 접근함에 따라 $y(t)$의 크기가 영에 접근할 때
- 아래와 같은 극을 가진 시스템을 고려해 보자

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \qquad \text{or} \qquad s_i = \sigma_i - j\omega_i$$

1. If $\sigma_i < 0$ for all i, $i = 1, 2, \cdots, n$ (all the roots are in the left-half s-plane), then the system is said to be "asymptotic stable" or "stable"
2. If $\sigma_i = 0$ with no multiple-order roots on the $j\omega$-axis and no $\sigma_i > 0$, then the system is said to be "marginally stable" or "marginally unstable"
3. If $\sigma_i > 0$ for any i, or $\sigma_i = 0$ for any multiple-order root, then the system is said to be "unstable"

17 안정도 판별법 : 근을 구하지 않고 안정도를 판별하는 법



- Routh-Hurwitz 판별법
- Nyquist 판별법
- Bode 선도 활용법

18 Routh 안정도 판별법 : 다항식을 인수분해 하지 않고, 복소평면의 오른쪽 반평면에 있는 폐루프의 극의 수를 결정할 수 있다.

- 판별 절차
  - 특성방정식(s의 다항식)을 다음과 같이 배열한다: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$
  - 모든 계수 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)$는 모두 0이 아니고 같은 양의 부호이어야 한다. (필요조건)
  - 다음의 연산을 수행하여 Routh table을 완성한다.

$$
\begin{array}{rllll}
s^n : & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} : & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = b_1 & \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = b_2 & \cdots & \\
s^{n-3} : & \dfrac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = c_1 & \cdots & & \\
\vdots & & & & \\
s^0 : & a_0 & & &
\end{array}
$$

  - 양의 실수부를 가진 근의 갯수는 배열의 제 1열의 부호변화 횟수와 동일하다,
  - 그러므로, 모든 근이 복소평면의 왼쪽 반평면에 있을 필요충분조건은 "모든 계수가 양이고, 제 1 열의 모든 항들이 양의 부호를 가지는 것"이다.

- 특수한 경우 (1) 어떤 행의 제 1열의 항은 0이고, 나머지 항들이 0이 아니거나 없으면, 그 0을 매우 작은 양수 ϵ으로 치환하고, 배열을 계속 계산한다.

예) $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

$$\begin{array}{lll} s^3 : 1 & & 1 \\ s^2 : 2 & & 2 \\ s^1 : 0(\approx \epsilon) & & \\ s^0 : 2 & & \end{array}$$

해석 결과) 한쌍의 허수근이 ($s = \pm j$) 존재한다.

- 특수한 경우 (2) 어떤 유도된 행의 모든 계수가 0이면, 복소평면에서 크기가 같고, 방사형으로 반대쪽에 있는 근이 존재함을 표시한다. 즉 크기가 같고 부호가 다른 두 실근 혹은 두개의 컬레 복소근이 존재함을 의미한다.
  이러한 경우에 배열의 나머지 부분은 앞 행의 계수를 사용하여 보조다항식을 만들고, 이 보조다항식의 도함수의 계수로서 다음 행을 사용한다.
  예) $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$ (불안정)

$$\begin{array}{llllll} & s^5 : 1 & 24 & -25 & & \\ & s^4 : 2 & 48 & -50 & \leftarrow & P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \\ & s^3 : 0 & 0 & \leftarrow & \dfrac{P(s)}{ds} = 8s^3 + 96s & \\ new & s^3 : 8 & 96 & & & \\ & s^2 : 24 & -50 & & & \\ & s^1 : 112.7 & & & & \\ & s^0 : -50 & & & & \end{array}$$

해석 결과) 제 1열의 부호가 1번 변하므로, 양의 실수부를 갖는 근이 1개 있다. 또한 4차의 보조다항식의 근이 방사형으로 배치되어야 하므로, 2개의 근은 허수축에 있어야 하며, 실수축에 크기가 같고 부호가 다른 근이 있어야 한다.