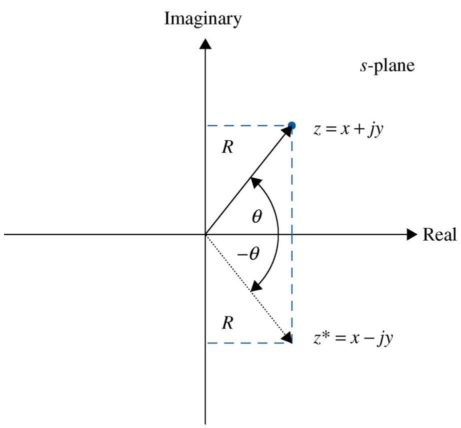
# 7 기타: 알아야 할 내용들

## 1 복소수 (complex numbers)

- 직각좌표계 (rectangular form) ($x$: 실수부, $y$: 허수부, $j = \sqrt{-1}$)

$$z = x + jy$$




- 기하학적인 관계

$$x = R\cos\theta \quad \text{and} \quad y = R\sin\theta$$

$R$은 $z$의 크기, $\theta$는 $z$의 위상

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

그러므로

$$z = R\cos\theta + jR\sin\theta$$

- (참고) **Taylor series expansions**

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \cdots \\
\sin x &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots
\end{aligned}$$

- 오일러 공식 **(Euler formula)**

$$\begin{aligned}
e^{j\theta} &= 1 + \frac{1}{1!}(j\theta) + \frac{1}{2!}(j\theta)^2 + \frac{1}{3!}(j\theta)^3 + \frac{1}{4!}(j\theta)^4 + \frac{1}{5!}(j\theta)^5 \cdots \\
&= 1 + j\frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - j\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + j\frac{1}{5!}\theta^5 \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + j\left(\frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + j\sin\theta
\end{aligned}$$

- 극좌표계 **(polar form)** ($R$: 크기, $\theta$: 위상)

$$z = x + jy = R\cos\theta + jR\sin\theta = Re^{j\theta} = R\angle\theta$$

- 컬레복소수 (complex conjugate)

$$z^* = x - jy = R\cos\theta - jR\sin\theta = Re^{-j\theta} = R\angle - \theta$$

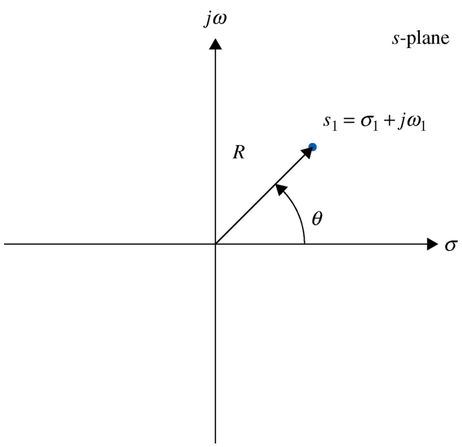
Note that

$$zz^* = R^2 = x^2 + y^2$$

## 2 복소변수 (complex variables), 복소변수함수 (functions of complex variables)

- 복소평면 상의 임의의 점 $s_1$은 실수부 $\sigma_1$와 허수부 $\omega_1$로 표현

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$$

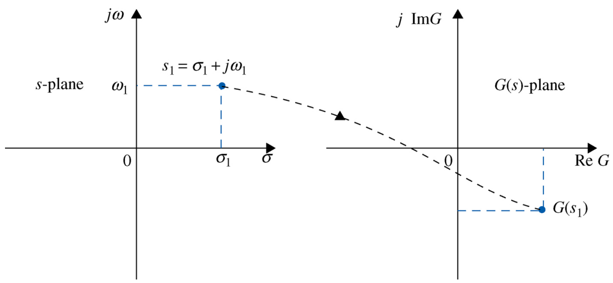



- 복소변수 함수 $G(s)$ 또한 실수부와 허수부를 가짐

$$G(s) = Re[G(s)] + jIm[G(s)]$$

- $s \to G(s)$ : 단가함수 (one-to-one mapping) 이지만, 역함수는 $G(s) \to s$: 단가함수 아님. 예를 들어,

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$




$$s_1 \quad \rightarrow \quad G(s_1) \quad \text{but} \quad G(s_1) \quad \nrightarrow \quad s_1$$

$G(s) = \infty$이 2점 ($s = 0$ or $s = -1$)으로 매핑됨.

## 3 해석함수 (analytic function)

- 어떤 함수와 그 함수의 모든 도함수가 s 평면의 어떤 영역에서 존재하면, 그 함수는 그 영역에서 해석함수이고 해석적(analytic)이라고 한다.
- $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ is analytic except at the points $s = 0$ and $s = -1$
- $G(s) = s + 2$ is analytic at every point

## 4 함수의 특이점과 극 (singularities and poles of a function)

- 특이점: 그 함수 혹은 그 함수의 도함수들이 정의되지 못하는 (존재하지 않는) $s$평면의 점.
- 극은 가장 일반적인 형태의 특이점.
- 극의 정의: 어떤 함수 $G(s)$가 $s = p_1$ 근방에서 해석적이고, 단가이며, 다음의 극한치 $\lim_{s \to p_i}[(s - p_i)^r G(s)]$가 0이 아닌 유한한 값을 가지면 이 함수 $G(s)$는 $s = p_i$에 $r$차의 극을 가진다고 한다.
- $r = 1$이면, $s = p_i$에서의 극은 "단순 극 (simple pole)"이라고 한다.
- For example

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2}$$

  - $s = -3$에서 2차 극 (a pole of order 2)
  - $s = 0$ and $s = -1$에서 단순 극 (simple poles)

## 5 함수의 영점 (zeros of a function)

- 영점의 정의: 함수 $G(s)$가 $s = z_i$에서 해석적이고, 만일 $\lim_{s \to z_i}[(s - z_i)^{-r} G(s)]$가 0이 아닌 유한한 값을 가지면, $G(s)$는 $s = z_j$에서 $r$차의 영점을 가진다고 한다.
- 극의 총 수 = 영점의 총 수
- For example

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2}$$

  - 4개의 극(four poles) : $s = 0, -1, -3, -3$
  - 4개의 영점 (four zeros) : $s = -2$ (finite) and $s = \infty, \infty, \infty$ (three infinite zeros)

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10}{s^3} = 0$$

## 6 극좌표 표현 (polar representation)

- At $s = 2j$, find the polar representation of the function?

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

[solution]

$$G(2j) = \frac{1}{2j(2j+1)} = \frac{1}{2j} \times \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j\tan^{-1}2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}e^{-j(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}2)}$$

- (참고) $s = j\omega$를 사용함에 의해 얻어지는 주파수 응답 함수 (frequency response function, $G(j\omega)$)
  1. By definition, if $s = j\omega$, $G(j\omega)$ is the "frequency response function" of $G(s)$, b/c $\omega$ has a unit of frequency.
  2. 다음의 2차 시스템을 고려해 보자

$$G(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

  - 크기 (the magnitude of $G(j\omega)$)

$$\begin{aligned} R = |G(j\omega)| &= \frac{K}{|j\omega + p_1||j\omega + p_2|} \\ &= \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + p_1^2}\sqrt{\omega^2 + p_2^2}} \end{aligned}$$

- 위상 (the phase angle of $G(j\omega)$)

$$\begin{aligned}\phi = \angle G(j\omega) &= \angle K - \angle(j\omega + p_1) - \angle(j\omega + p_2)\\ &= -\tan^{-1}\frac{\omega}{p_1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{p_2}\end{aligned}$$

## 7 Laplace 변환식

- (Laplace 변환의 장점) 선형 상미분 방정식의 해를 구할 때 유익하게 사용될 수 있는 연산법.
  - 상미분 방정식을 복소변수 $s$의 대수 방정식으로 변환할 수 있다.
  - 시스템 미분방정식을 직접 풀지 않고 시스템의 성능을 예측할 수 있는 도해적 기법을 사용할 수 있다.
  - 미분 방정식의 해를 구할 때, 해의 과도성분과 정상상태성분을 동시에 구할 수 있다.
- (Cauchy-Riemann 조건) 한 영역에서 복소함수 $G(s)$와 그것의 도함수가 존재할 때, $G(s)$는 그 영역에서 해석적(analytic)이라고 한다.

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

where $\Delta G = \Delta G_x + j\Delta G_y$ and $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta w$. 실수축 경로에 의한 도함수가 허수축 경로에 의한 도함수와 같아야 하므로

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \left( \frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma} + j\frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma} \right) = \lim_{j\Delta w \to 0} \left( \frac{\Delta G_x}{j\Delta w} + j\frac{\Delta G_y}{j\Delta w} \right)$$
$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -j\frac{\partial G_x}{\partial w} + \frac{\partial G_y}{\partial w}$$

따라서, 다음 2조건

$$\therefore \qquad \frac{\partial G_x}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial w} \qquad\qquad \frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial w}$$

이 만족된다면, 도함수 $\frac{dG(s)}{ds}$ 는 유일하게 결정된다.
위의 2조건을 Cauchy-Riemann 조건이라고 하고, 이 조건이 만족되면 함수 $G(s)$는 해석적이다.

  - 복소평면에서 $G(s)$가 해석적인 점을 통상점 (ordinary point) 이라고 한다.

– 복소평면에서 $G(s)$가 비해석적인 점을 특이점 **(singular point)** 이라고 한다.

- **(Euler 정리로 부터 유도된 삼각함수)**

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

따라서

$$\begin{aligned}\therefore \qquad \cos\theta + j\sin\theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)\\ &= 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \cdots\\ &= e^{j\theta}\end{aligned}$$

**Euler** 정리로 부터

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

그러므로

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

## 8 Laplace 변환 정의 및 수렴좌표 (abscissa of convergence)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- 함수 $f(t)$의 Laplace 변환식은 Laplace 적분이 수렴하면 존재한다.
- $f(t)$가 $t > 0$인 모든 유한구간에서 구분적 연속 (piecewise continuous) 이고, 또 $t$가 무한대로 접근할 때 $f(t)$가 지수차수 (exponential order) 이면 Laplace 적분은 수렴한다.
- $t \to \infty$일때, 함수 $e^{-\sigma t}|f(t)|$을 0으로 접근시키는 양의 상수 $\sigma$가 존재하면 $f(t)$를 지수차수의 함수라고 한다.
- 함수 $e^{-\sigma t}|f(t)|$의 극한값이 $\sigma > \sigma_c$ 경우에는 0으로 접근하고, $\sigma < \sigma_c$ 경우에 무한대로 접근한다면, 이 경계값 $\sigma_c$를 수렴좌표라고 한다.
- 일반적으로 수렴좌표 $\sigma_c$는 복소평면에서 가장 오른쪽에 위치한 극의 실수부에 해당한다.
- 지수함수보다 빨리 증가하는 함수에 대해서는 수렴좌표를 찾는 것은 불가능하다. 예를들어 $e^{t^2}$, $te^{t^2}$와 같은 함수는 Laplace 변환식이 존재하지 않는다.
- 입력이 $t = 0$에서 가해지며, 시스템의 응답이 $t = 0$ 이전에는 발생되지 않는다. 즉 출력은 입력보다 먼저 발생하지 않는다. 이러한 시스템을 인과적(causal)이라고 한다.

## 9 Laplace 변환의 중요한 정리

- 지수함수

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[Ae^{-\alpha t}] &= \int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-(\alpha+s)t}dt = -\frac{A}{s+\alpha}e^{-(\alpha+s)t}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{A}{s+\alpha}\end{aligned}$$

- 계단함수, $A \cdot 1(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A] &= \int_0^\infty Ae^{-st}dt = -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{A}{s}\end{aligned}$$

- 램프함수

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[At] &= \int_0^\infty Ate^{-st}dt = At\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty A\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt \\ &= 0 + \int_0^\infty A\frac{e^{-st}}{s}dt = -A\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{A}{s^2}\end{aligned}$$

- sine 함수

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A\sin\omega t] &= \int_0^\infty A\sin\omega t e^{-st}dt = \int_0^\infty A\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{A}{2j}e^{(j\omega-s)t}dt - \int_0^\infty \frac{A}{2j}e^{(-j\omega-s)t}dt \\ &= \frac{A}{2j(j\omega-s)}e^{(j\omega-s)t}\Big|_0^\infty - \frac{A}{2j(-j\omega-s)}e^{(-j\omega-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{A}{2j(s-j\omega)} - \frac{A}{2j(s+j\omega)} \\ &= \frac{A}{2j}\frac{2j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \\ &= \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

- 이동함수 $[\tau = t-\alpha]$ **and** $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\alpha)\cdot 1(t-\alpha)] &= \int_0^\infty f(t-\alpha)\cdot 1(t-\alpha)\cdot e^{-st}dt = \int_{-\alpha}^\infty f(\tau)\cdot 1(\tau)\cdot e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-s\tau}\cdot e^{-s\alpha}d\tau = e^{-s\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{-\alpha s}F(s)\end{aligned}$$

- 펄스함수 $f(t) = \frac{A}{t_0}\cdot 1(t) - \frac{A}{t_0}\cdot 1(t-t_0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}\cdot 1(t) - \frac{A}{t_0}\cdot 1(t-t_0)\right] &= \frac{A}{t_0}\int_0^\infty 1(t)\cdot e^{-st}dt - \frac{A}{t_0}\int_0^\infty 1(t-t_0)\cdot e^{-st}dt \\ &= \frac{A}{st_0} - e^{-t_0 s}\frac{A}{st_0} = \frac{A}{t_0 s}(1-e^{-t_0 s})\end{aligned}$$

- 임펄스함수 $f(t) = \lim_{t_0 \to 0}[\frac{A}{t_0} \cdot 1(t) - \frac{A}{t_0} \cdot 1(t - t_0)]$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{t_0 \to 0} \left[ \frac{A(1 - e^{-t_0 s})}{t_0 s} \right] \\ &= \lim_{t_0 \to 0} \left[ \frac{Ase^{-t_0 s}}{s} \right] \\ &= A\end{aligned}$$

- $f(t)$와 $e^{-\alpha t}$의 곱

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\alpha)t} dt \\ &= F(s + \alpha)\end{aligned}$$

$f(t)$에 $e^{-\alpha t}$를 곱하는 것은 **Laplace** 변환식에서 $s$ 대신에 $s + \alpha$를 대입하는 것과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] &= \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] &= \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

- 시간 척도의 변경 $[\frac{t}{\alpha} = t_1]$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-\alpha s t_1} \alpha dt_1 \\ &= \alpha F(\alpha s)\end{aligned}$$

- Laplace 적분의 하한에 대하여

$$\mathcal{L}_{+}\left[f(t)\right] = \int_{0^{+}}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}_{-}\left[f(t)\right] = \int_{0^{-}}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}_{+}\left[f(t)\right] + \int_{0^{-}}^{0^{+}} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)$가 $t = 0$에서 impulse함수를 포함하고 있다면

$$\mathcal{L}_{+}\left[f(t)\right] \neq \mathcal{L}_{-}\left[f(t)\right]$$

- 미분 정리

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = f(t)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} f'(t)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt$$
$$= \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}[f'(t)]$$

그러므로

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

- 최종값 정리 : $f(t)$의 정상상태 거동과 $s = 0$ 부근에서 $sF(s)$의 거동과의 관계를 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] \\
\lim_{s\to 0}\left[\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt\right] &= \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] \\
\int_0^\infty f'(t)dt &= \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] \\
\therefore \qquad f(\infty) &= \lim_{s\to 0} sF(s)
\end{aligned}$$

- 초기값 정리

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to \infty}\mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{s\to \infty}[sF(s) - f(0)] \\
\lim_{s\to \infty}\left[\int_{0^+}^\infty f'(t)e^{-st}dt\right] &= \lim_{s\to \infty}[sF(s) - f(0^+)] \\
0 &= \lim_{s\to \infty}[sF(s) - f(0^+)] \\
\therefore \qquad f(0^+) &= \lim_{s\to \infty} sF(s)
\end{aligned}$$

- 적분 정리 $f^{-1}(0) = [\int f(t)dt]_{t=0}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] &= \int_0^\infty \left[\int f(t)dt\right] e^{-st}dt \\
&= \left[\int f(t)dt\right]\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt \\
&= \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{s}F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s}
\end{aligned}$$

정적분 정리

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

- 복소미분 정리

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf(t)] &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}[-e^{-st}]dt \\
&= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt
\end{aligned}$$

그러므로

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$
$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$
$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

- 상승적분 or 합성적분 (convolution integral) 정리 : $[f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]$

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$