

8 기타: 알아야 할 내용

1 전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

1. 다음의 2차 전방경로 전달함수에 $s = -\frac{1}{T}$ 인 영점을 추가해 보자. (PD 제어기 추가와 유사)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

2. 단위피드백 전달함수는 다음과 같다

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

3. 영점 추가의 효과 : 전방경로 전달함수에 영점을 추가하면 페루프 시스템의 대역폭을 증가시키는 일반적인 효과가 있다.

2 전방경로 전달함수에 극 추가의 효과

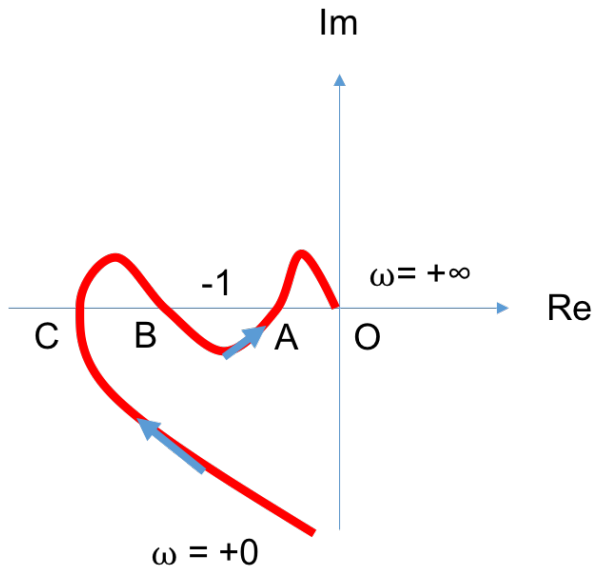
1. 전방경로 전달함수에 $s = -\frac{1}{T}$ 인 극을 추가해 보자. (PI 제어기 추가와 유사)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)(1 + Ts)}$$

2. 극 추가의 효과: 전방경로 전달함수에 극을 추가하면 페루프 시스템을 덜 안정시키고, 대역폭을 감소시킨다.

3 Bode 선도의 크기곡선 기울기에 따른 상대 안정도

1. 조건부 안정 시스템은 루프이득이 변화할 때 안정/불안정 조건을 가진다.
2. 조건부 안정 시스템: 고려되고 있는 시스템이 안정해지기 위해서는 $-1 + j0$ 점이 OA와 BC 사이에 놓여서는 안된다. 이런 시스템은 제한된 이득 범위에서 안정하다. 이러한 시스템을 조건부 안정 시스템이라 부른다.



4 PID 제어기 동조 (gain tuning) 규칙

- PID 제어기 전달함수

$$G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

제어기 입력을 $e(t)$, 출력을 $u(t)$ 라고 하면

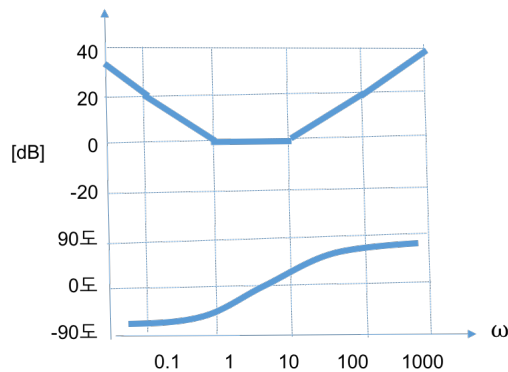
$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

- PID 제어기의 Bode 선도

$$G_c(s) = \frac{(0.1s + 1)(s + 1)}{s}$$

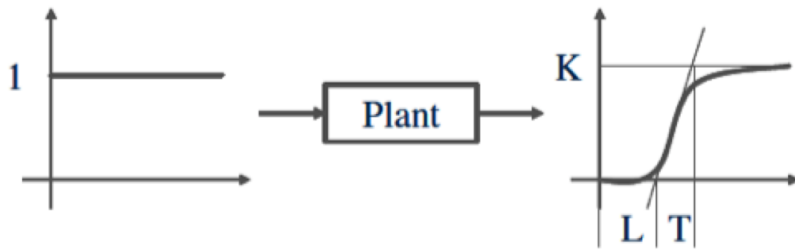
$$|G_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{0.01\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 1}}{|\omega|}$$

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1} 0.1\omega + \tan^{-1} \omega - 90^\circ$$



- PID 제어기 동조를 위한 Ziegler Nichols 규칙

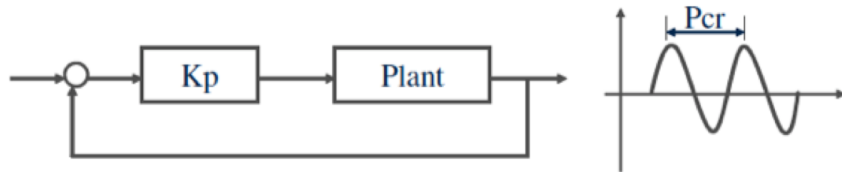
- 제 1 방법 : 계단응답에서 25%의 최대오버슈트를 가지게 설계하는 것을 목표로 한다. 플랜트가 적분기나 주요 페루프 컬레 복소극을 포함하지 않으면 단위계단 응답곡선은 s-형상을 가진다.



$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \\
 &= 1.2 \frac{T}{LK} \left(1 + (0.5L)s + \frac{1}{(2L)s} \right) \\
 &= 0.6 \frac{T}{K} \frac{(s + \frac{1}{L})^2}{s}
 \end{aligned}$$

즉 $K_p = 1.2 \frac{T}{LK}$, $T_d = 0.5L$, and $T_i = 2L$ 로 설정할 것을 경험적으로 제안했다.

- 제 2 방법 : 비례제어 동작만을 이용하여 K_p 를 0에서 증가시키면서 출력이 일정한 진동을 유지하도록 하는 임계이득 K_{cr} 을 찾는다. 이때 측정되는 일정한 진동의 주기를 임계주기 P_{cr} 을 얻으면, 이 두 임계 값을 활용하여 제어기 이득은 다음과 같이 결정한다.



$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \\
 &= 0.6K_{cr} \left(1 + (0.125P_{cr})s + \frac{1}{(0.5P_{cr})s} \right) \\
 &= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{(s + \frac{4}{P_{cr}})^2}{s}
 \end{aligned}$$

즉 $K_p = 0.6K_{cr}$, $T_d = 0.125P_{cr}$, and $T_i = 0.5P_{cr}$ 로 설정할 것을 경험적으로 제안했다.

- 주석

- * 플랜트에 적분기가 있으면 제 1 방법을 사용할 수 없다
- * 비례제어에도 진동을 유지할 수 없으면 제 2 방법을 사용할 수 없다.

• (Example) $\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$ 에 PID 제어를 Ziegler Nichols 방법으로 설계하라?

• (Solution)

1. 제어대상 플랜트에 적분기가 있으므로 제 2 방법을 사용한다
2. 진동을 유발하는 K_{cr} 구하기: 실험적으로 구하는 것이 마땅하나, 실험장치가 없으니, 이론적으로 구하는 방법을 설명한다. 특성방정식을 찾으면 다음과 같다.

$$1 + K_p \frac{1}{s(s+1)(s+5)} = 0 \qquad s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

Routh 판별법으로 허수축을 가지게 되는 이득 K_p 를 K_{cr} 로 찾는다.

$$\begin{array}{r} s^3 : 1 \qquad \qquad 5 \\ s^2 : 6 \qquad \qquad K_p \\ s^1 : \frac{K_p - 30}{6} \\ s^0 : K_p \end{array}$$

즉 $K_p = 30$ 일때 진동을 한다. 임계이득 $K_{cr} = 30$ 으로 설정

3. s^2 의 보조 다항식 $6s^2 + 30 = 0$ 에서 허수축과의 교점을 얻으면 $s = \pm\sqrt{5}j$ 에서 허수축과 만난다. 그러므로

$$\omega = \sqrt{5} = 2\pi f = \frac{2\pi}{P_{cr}} \quad \rightarrow \quad P_{cr} = 2.82[s]$$

4. $K_{cr} = 30$ and $P_{cr} = 2.81$ 로 부터 PID 제어기는 다음과 같이 얻어진다.

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18 \qquad T_d = 0.125P_{cr} = 0.351 \qquad T_i = 0.5P_{cr} = 1.41$$

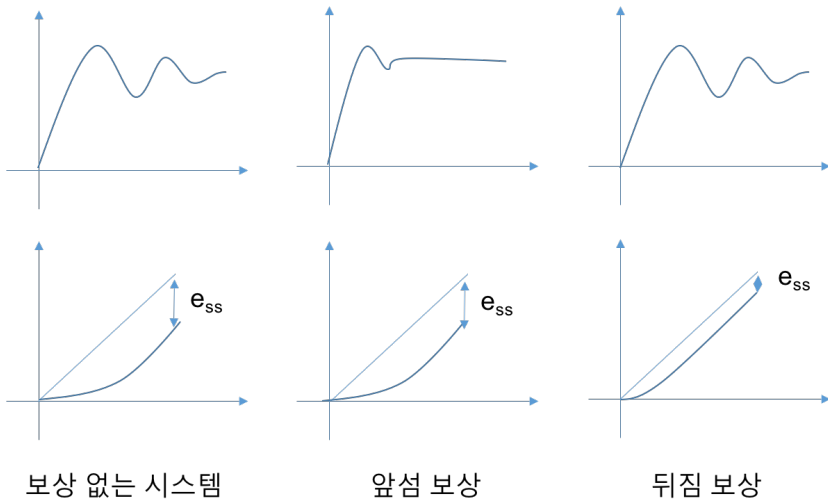
$$G_c(s) = 18 \left(1 + 0.351s + \frac{1}{1.41s} \right)$$

제어기 입력을 $e(t)$, 출력을 $u(t)$ 라고 하면

$$u(t) = 18 \left[e(t) + 0.351 \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{1.41} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

5 앞섬, 뒤짐, 뒤짐-앞섬 보상의 비교

1. 앞섬보상은 근궤적의 형상을 바꿈으로서 원하는 페루프 극을 마련해 준다. 주파수 영역에서의 앞섬보상은 위상여유와 대역폭을 크게 한다. 큰 대역폭은 정착시간의 단축을 의미하며, 위상여유의 증가는 상대안정도의 향상을 의미한다.
그러나 앞섬보상은 잡음신호가 존재하면 바람직하지 않다. 큰 대역폭은 잡음신호의 민감도를 향상시켜준다. 이러한 경우 뒤짐보상을 추가하여야 한다.
2. 뒤짐보상은 정상상태 정확도를 향상시켜준다. 그러나 대역폭을 감소시킨다. 대역폭의 감소가 지나치면 느린 응답을 가져온다. 빠른 응답과 좋은 정확도를 동시에 요구하면, 뒤짐-앞섬 보상기를 사용하여야 한다.



6 바람직하지 못한 극의 소거

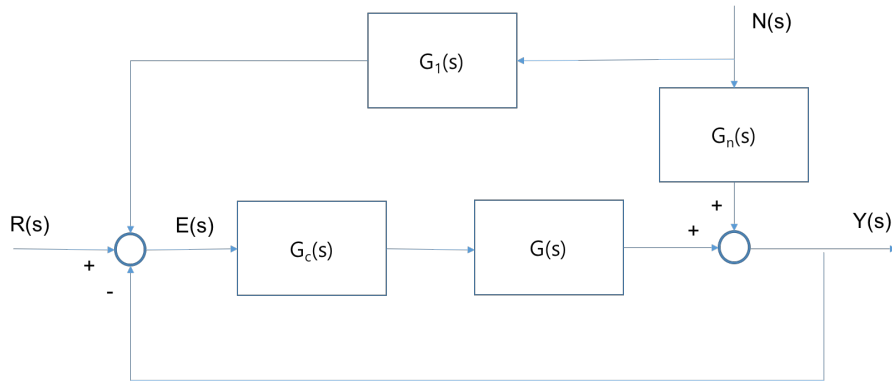
1. 직렬로 연결된 요소들의 전달함수는 각각의 전달함수의 곱이므로, 보상 요소를 직렬로 설치함으로 바람직하지 못한 극과 영점을 제거할 수 있다.

$$\frac{1}{T_1s + 1} \times \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1} = \frac{1}{T_2s + 1}$$

T_2 가 T_1 보다 아주 작을 때는, 즉 큰 시정수 T_1 을 효과적으로 제거할 수 있다.

2. 원래 시스템에서 바람직하지 못한 극이 s 평면의 오른쪽 반평면에 있다면, 이런 극 제거를 통한 보상을 사용하여서는 안된다. 극과 영점의 위치에 내포된 부정확성으로 실제적 관점에서 완전한 제거가 불가능하기 때문이다.
3. 왼쪽 반평면의 극이 정확하게 소거되지 않을 경우에는 극-영점의 조합이 아주 작은 진폭의 진동을 과도응답에 야기시키실 수 있다.

7 플랜트의 앞먹임 제어 (feedforward control) : 플랜트 $G(s)$ 와 외란전달함수 G_n 을 안다고 가정한다.



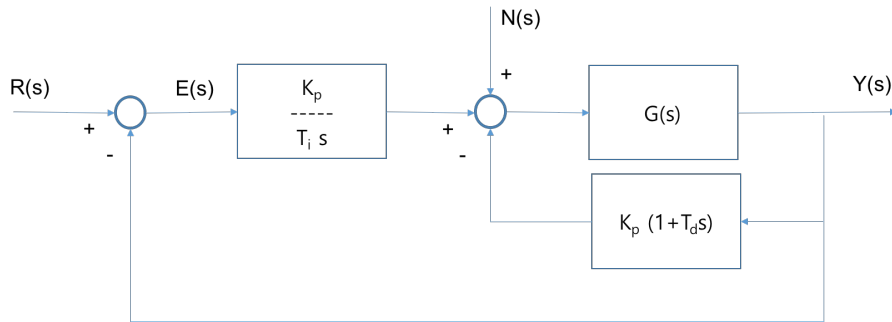
이때 외란 앞먹임 전달함수 $G_1(s)$ 의 설계법

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G_n(s)N(s) + G_c(s)G(s)[R(s) - Y(s) + G_1(s)N(s)] \\
 &= G_cG(R - Y) + (G_n + G_cGG_1)N
 \end{aligned}$$

이경우 외란의 영향이 제거되도록 결정한다.

$$G_1(s) = -\frac{G_n(s)}{G_c(s)G(s)}$$

8 I-PD 제어



- I-PD의 기본 개념은 PID 제어에서 포화현상을 피하는 것에 목적을 둔다
- 외란에 대해서는 포화가 일어날 가능성이 있는 PID 보다는 K_P 와 T_d 를 보다 크게 설정할 수 있어 외란을 영향을 빠르게 상쇄시킬 수 있다.
- 만약에 포화현상이 없다면 PID가 더 빠른 응답을 보인다.

9 저주파 통과필터 설계 :

$$G(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{\tau s+1} = \frac{O(s)}{I(s)}$$

$$(s+a)O(s) = aI(s) \quad sO(s) = \frac{o[n] - o[n-1]}{T}$$

$$\frac{o[n] - o[n-1]}{T} + ao[n] = ai[n]$$

$$\left(\frac{1}{T} + a\right)o[n] = \frac{1}{T}o[n-1] + ai[n]$$

$$o[n] = \frac{1}{1+aT}o[n-1] + \frac{aT}{1+aT}i[n]$$