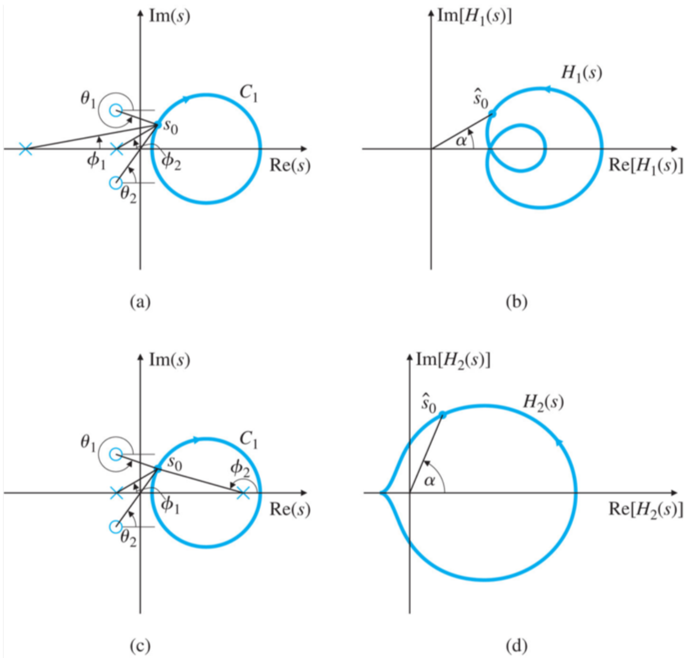
3 The Nyquist Stability Criterion

The Nyquist stability criterion relates the open-loop frequency response to the number of closed-loop poles of the system in the RHP.

3.1 The Argument Principle

A contour map of a complex function will encircle the origin $Z - P$ times, where Z is the number of zeros and P is the number of poles of the function inside the contour.



- Consider TF $H_1(s)$ whose poles and zeros are indicated in the s-plane in Fig. (a). We wish to evaluate H_1 for values of s on the clockwise contour C_1. We choose the test point s_o for evaluation. The resulting complex quantity has the form $H_1(s_o) = \vec{v} = |\vec{v}|e^{j\alpha}$ with the condition

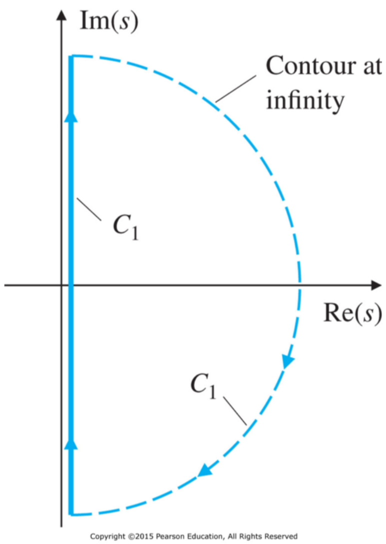
$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2$$

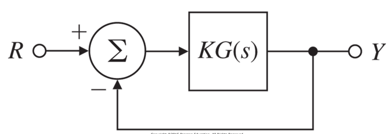
  As s transverse C_1 in clockwise direction starting at s_o, the angle α of $H_1(s)$ in Fig. (b) will change, but it will not undergo a net change of $360°$ as long as there are no poles and zeros within C_1.

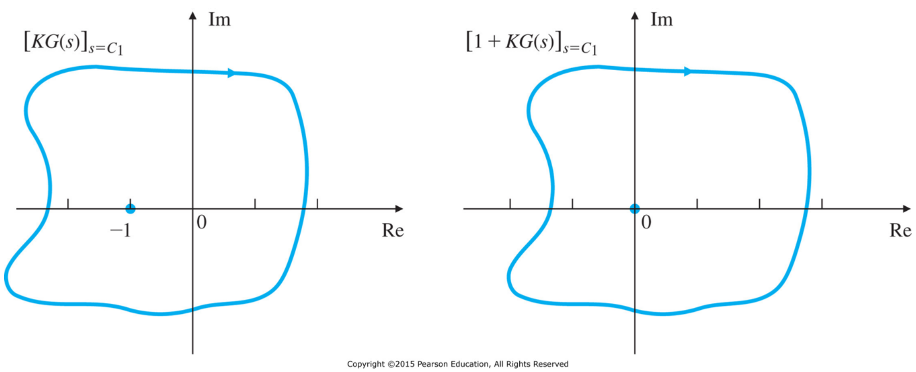
- Consider TF $H_2(s)$, whose pole-zero pattern is shown in Fig. (c). Note that it has a singularity (pole) within C_1. In this case, the angle ϕ_2 from pole within C_1 undergoes a net change of $-360°$ after one full transverse of C_1. Therefore, $H_2(s)$ encircles the origin in the counterclockwise direction, as shown in Fig. (d). On the contrary, if the $H(s)$ has zero within C_1, $H(s)$ mapping encircles the origin in clockwise direction.

3.2 Application of the Argument Principle to Control Design

- Nyquist 경로 C_1: s 평면 우반면 전체를 일주하도록 잡은 경로, $j\omega$ 축 위에 극이나 영점이 있으면 이들 주위로 반원을 따라 지나가도록 그림처럼 시계방향으로 설정할 수 있다. [본 교재에서는 시계방향으로 설정되어 있음, 타교재에서는 반시계방향으로 설정된 경우도 있으니 주의]







- Nyquist 선도는 극좌표선도를 Nyquist path C_1을 따라서 mapping된 전달함수 $KG(j\omega)$의 closed path
  - 주파수 응답 $KG(j\omega)$의 극좌표 선도는 ω가 0에서 ∞로 변화하는데 대하여 $KG(j\omega)$의 크기와 위상각을 극좌표 상에 그린 것
  - 극좌표 선도는 $\omega : 0 \to \infty$으로 변함에 따라 벡터 $|KG(j\omega)|\angle KG(j\omega)$의 궤적이다.

- **Nyquist** 안정도 판별: 루프 전달함수 $KG(s)$의 주파수 응답 특성의 정보로 부터 그 시스템의 페루프시스템의 절대 및 상대 안정도를 조사할 수 있음. 이 안정도 판별법을 사용하면 특성방정식의 근을 구하지 않아도 되는 장점이 있음.
  - **Nyquist** 안정도 판별법은 루프 전달함수 주파수응답 $KG(j\omega)$를 s평면의 오른쪽 반평면에 존재하는 $F(s) = 1 + KG(s)$의 영점과 극의 수와 관련시키는 방법
  - 페루프 시스템의 안정도 해석을 위한 **argument principle** 적용: 경로가 **Nyquist** 경로라면, 함수 $F(s) = 1+KG(s)$의 오른쪽 반평면에 존재하는 영점의 수 Z는, $F(s) = 1+KG(s)$의 극의 수 P에, 이 페곡선이 $F(s)$ 평면의 **원점을 시계방향으로 감싸는 횟수** N을 더한 것과 같다.

$$Z = P + N \qquad \rightarrow \qquad F(s) \text{ 영점의 수} = F(s) \text{ 극의 수} + N$$

  - **Nyquist** 안정도 판별법: $Z = P + N$ 적용 기준을 원점 $0 + 0j$에서 $-1 + 0j$로 변경하여 해석
    1. **unstable closed-loop pole**의 수 = **unstable open-loop pole**의 수+**(-1+j0)**을 시계 방향으로 감싼 횟수
    2. P가 0 이 아닐 경우, 시스템이 안정해 지기 위해서는 $Z = 0$, 즉 $N = -P$가 되어야 한다.
    3. $P = 0$일 경우, 시스템이 안정해 지기 위해서는 $-1 + j0$점을 감싸지 않아야 한다.
    4. $G(j\omega)$ 궤적이 $-1 + j0$점을 통과하면, 특성방정식의 근 또는 페루프의 극이 $j\omega$축 상에 위치한다.
    5. $-1 + j0$을 감싸지 않는다: s평면의 오른쪽 반평면에세 $G(s)$의 극이 존재하지 않으면 안정하다.
    6. $-1 + j0$을 반시계 방향으로 감싼 회전수와 s평면 오른쪽 반평면에 존재하는 $G(s)$의 극의 수가 같으면 시스템은 안정하다.
    7. $-1 + j0$을 시계 방향으로 한번 혹은 한번 이상 감싼다: 시스템은 불안정하다.

- Procedure for Determining Nyquist Stability

  1. Obtain Nyquist plot $KG(s)$
  2. Evaluate the number of clockwise encirclement of $-1+0j$, and call that number N. If the encirclements are in the counterclockwise direction, N is negative
  3. Determine the number of unstable poles of $KG(s)$, and call that number P.
  4. Calculate the number of unstable closed-loop poles Z:

  $$Z = N + P$$

  where it is noted that we hope to have $Z = 0$ for the stability.

- Nyquist 경로에 대응하는 전달함수의 궤적을 그리는 방법의 기본 예 (Nyquist 선도)

  1. 적분 및 미분 인자 : $\frac{1}{j\omega}$ and $j\omega$
  2. 1차 인자 : $\frac{1}{1+j\omega T}$ and $1 + j\omega T$
  3. 2차 인자 : $\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ and $1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

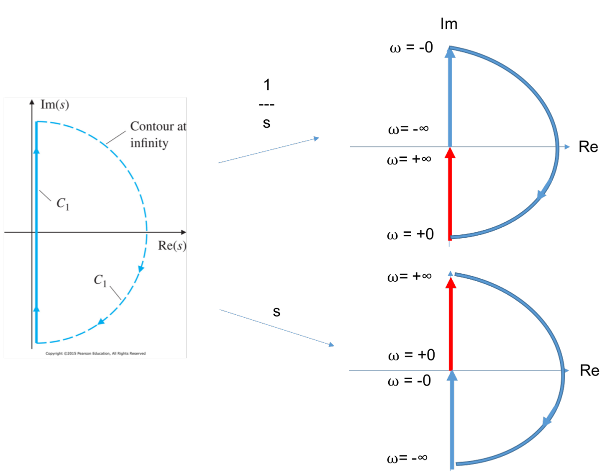
1. 적분 및 미분 인자 : $\frac{1}{j\omega}$ and $j\omega$

$$\frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90^\circ \qquad\qquad \text{음의 허수축}$$

- As $\omega : +0 \rightarrow +\infty$: $\frac{1}{j\omega}$는 음의 허수축에 맵핑된다.
- As $\omega : +\infty \rightarrow -\infty$ with radius ∞: $\frac{1}{s} \approx \frac{1}{+\infty} = +0$으로 맵핑된다.
- As $\omega : -\infty \rightarrow -0$: $\frac{1}{j\omega}$는 양의 허수축에 매핑된다.
- As $s : -0 \rightarrow +0$ with a radius ϵ: $\frac{1}{s} \approx \frac{1}{\epsilon} = +\infty$는 양의 무한대 반원으로 맵핑된다.

$$j\omega = \omega\angle 90^\circ \qquad\qquad \text{양의 허수축}$$

- As $\omega : +0 \rightarrow +\infty$: $j\omega$는 양의 허수축에 매핑된다.
- As $\omega : +\infty \rightarrow -\infty$ with radius ∞: $s \approx +\infty$
- As $\omega : -\infty \rightarrow -0$: $j\omega$는 음의 허수축에 매핑.
- As $s : -0 \rightarrow +0$ with a radius ϵ: $s \approx \epsilon = +0$



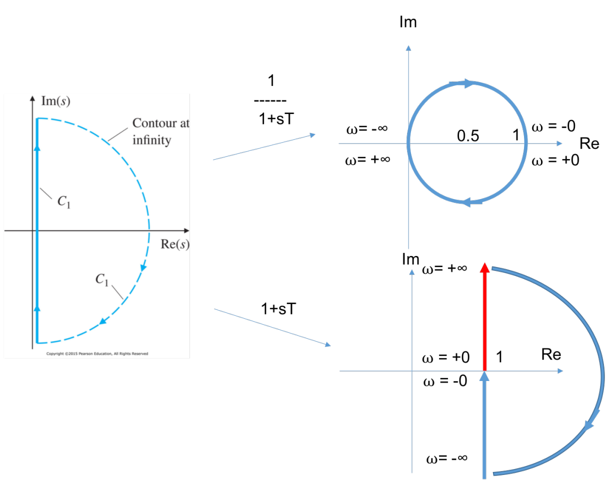
2. 1차 인자 : $\frac{1}{1+j\omega T}$ and $1+j\omega T$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle-\tan^{-1}\omega T \qquad (0.5, j0)\text{를 중심으로 반지름이 0.5인 반원}$$

- As $\omega:+0\rightarrow+\infty$: 1에서 출발하여 아래쪽으로 반원을 그리고 0으로 접근
- As $\omega:+\infty\rightarrow-\infty$ with radius ∞: 원점
- As $\omega:-\infty\rightarrow-0$: 0에서 출발하여 위쪽으로 반원을 그리고 1로 접근
- As $s:-0\rightarrow+0$ with a radius ϵ: +1

$$G(j\omega)=1+j\omega T=\sqrt{1+\omega^2T^2}\angle\tan^{-1}\omega T \qquad (1, j0)\text{을 지나는 허수축과 평행한 직선}$$

- As $\omega:+0\rightarrow+\infty$: $(1, j0)$을 지나고 양의 허수축에 평행하게 맵핑된다.
- As $\omega:+\infty\rightarrow-\infty$ with radius ∞: $1+sT\approx+\infty$는 양의 무한대 반원으로 맵핑된다.
- As $\omega:-\infty\rightarrow-0$: $1+j\omega T$는 $(1, j0)$을 지나고 의 음의 허수축에 평행하게 맵핑된다.
- As $s:-0\rightarrow+0$ with a radius ϵ: $1+sT\approx+1$



[증명] $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$이 원이 됨을 증명하라

For given

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2T^2} - j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2} = X + jY$$

we have

$$\begin{aligned}
(X-0.5)^2 + Y^2 &= \frac{0.25 - 0.5\omega^2T^2 + 0.25\omega^4T^4}{(1+\omega^2T^2)^2} + \frac{\omega^2T^2}{(1+\omega^2T^2)^2} \\
&= \frac{0.25 + 0.5\omega^2T^2 + 0.25\omega^4T^4}{(1+\omega^2T^2)^2} \\
&= 0.25 \\
&= 0.5^2 \\
\therefore \qquad (X-0.5)^2 + Y^2 &= 0.5^2
\end{aligned}$$

3. 2차 인자 : $\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ and $1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\angle-\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$ 원에 가까운 모양

$$G(j\omega)=1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\angle\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$ 포물선에 가까운 모양