- (7.4.2) Dynamic Response from the State Equations

  1. Taking a LT of

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

  we obtain

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \end{aligned}$$

  Assuming zero initial conditions ($x(0) = 0$) results in the TF of the system

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2. (Example 7.11) Find the TF of the following SS system

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

First

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix} \qquad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix}$$

Second

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12} \end{aligned}$$

3. 특성방정식, 고유치, 고유벡터

a) 상태공간 방정식의 전달함수로의 변환에서 특성방정식을 찾을 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad y = Cx + Du$$

시스템의 전달함수는

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D$$

역함수의 정의를 이용하면

$$G(s) = C\frac{[adj(sI - A)]}{det(sI - A)}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)}\left(C[adj(sI - A)]B + \det(sI - A)D\right)$$

여기서 $[adj(sI - A)] \in R^{n\times n}$ **and** $\det(sI - A) \in R$. 그러므로 전달함수의 분모 항이 특성방정식이다.

$$\det(sI - A) = 0 \qquad : \quad \text{특성방정식}$$

b) 시스템 행렬 A의 고유치 (eigenvalue)와 고유벡터 (eigenvector)

$$Ap_i = \lambda_i p_i \qquad\qquad (\lambda_i I - A)p_i = 0$$

여기서 행렬 A의 i번째 고유치 $\lambda_i \in R$이고, 고유벡터는 $p_i \in R^n$이다. 시스템 행렬의 고유치를 찾는 것은 특성방정식의 근을 찾는 것과 같다.

c) (Example) 다음 시스템의 특성방정식, 극, 고유치, 고유벡터를 찾아라?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- 특성방정식: $s^2 - 1 = 0$

$$\det(sI - A) = \left| \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \right| = (s-1)(s+1) = 0$$

- 시스템 극, $s_{1,2} = 1, -1$
- 고유치, $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = -1$
- 고유벡터 $(\lambda_1 I - A)p_1 = 0$ and $(\lambda_2 I - A)p_2 = 0$

$$(\lambda_1 I - A)p_1 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{11} = 1 \quad (arbitrary) \quad \text{and} \quad p_{12} = 0$$

$$(\lambda_2 I - A)p_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{21} = 1 \quad \text{and} \quad p_{22} = 2$$

$$\therefore \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

사실 p_1, p_2의 배수로 된 벡터는 모두 고유벡터가 될 수 있다. 고유벡터는 영공간(null space)을 확장하는 basis 벡터 중 하나를 찾으면 된다. 다시 말해서 unique하지 않다.

4. Poles and Zeros from SS representation

   a) If the pole-zero cancellation does not happen, the poles $s = p_i$ can be found from the following characteristic equation:

$$\det(sI - A) = 0$$

   b) We can also determine the transmission zeros $s = z_i$ from the zero polynomial:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$$

   c) Thus the TF can be found as an another form as follows:

$$G(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}{\det(sI - A)}$$

5. (Example 7.12) Find the zeros of the following system?

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

The transmission zeros are obtained from the following zero polynomial:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 + s = 0 \qquad \to \qquad s = -2(zero)$$

6. (Example 7.13)