7 기타: 알아야 할 내용

1 서론

1. 근궤적법이란? 특성방정식의 근을 시스템 매개변수 값의 변화에 따라 그린 것이다. 특별한 설명이 없는 한 루프 전달함수의 설정가능한 제어 이득을 0에서 ∞까지 변하는 매개변수라고 가정한다. (보통 양의 $K \geq 0$에 대해서만 다룬다)
2. 근궤적법은 이득을 매개변수로 하여 루프 전달함수의 극이나 영점으로 부터 폐루프 극을 구할 수 있게 한다.
3. 근궤적법의 문제는 특성방정식에서 특정한 매개변수를 골라 이를 중심으로 다시 작성하고, 이를 사용하여 특정한 매개변수의 변화에 따라 특성방정식의 근이 어떻게 움직이는지 도해적으로 분석한다. 예를 들어,

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$$

   where $G_1(s)H_1(s)$ does not contain the variable parameter K,
4. 근궤적법에는 사용하는 매개변수의 개수에 따라
   - Root Loci (RL) : 1개 매개변수가 $0 \leq K < \infty$ 변화할 때의 근 궤적
   - Root Contours (RC) : 한 개 이상의 매개변수가 변할 때의 근궤적

2 근궤적의 기본성질

1. 전형적인 폐루프 제어시스템을 고려해 보자

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

2. 위 전달함수의 특성방정식 $1+G(s)H(s)$이 실수의 매개변수 K를 곱의 형태로 가지고 있다고 가정해 보자.

$$1+G(s)H(s)=0 \quad \Rightarrow \quad 1+KG_1(s)H_1(s)=0$$

where $G_1(s)H_1(s)$ **does not contain the variable parameter** K, 예를 들어,

$$1+G(s)H(s) = 1+\frac{s^2+(3+2K)s+5}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+K\frac{2s}{s^3+4s^2+5s+5} = 1+KG_1(s)H_1(s)=0$$

3. 복소영역에서 특성방정식의 근이 되기 위한 각도 및 크기 조건 유도 :

$$1+G(s)H(s)=0 \quad \rightarrow \quad 1+KG_1(s)H_1(s)=0 \quad \rightarrow \quad G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

4. 일반적인 크기 조건 및 각도 조건은 다음의 일반적인 루프 전달함수로 부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$KG_1(s)H_1(s) = K\frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

복소영역상의 한점 s_1이 근이 되기 위한 크기 조건과 각도 조건:

$$|G_1(s_1)H_1(s_1)| = \frac{\Pi_{k=1}^{m}|s_1+z_k|}{\Pi_{j=1}^{n}|s_1+p_j|} = \frac{1}{|K|} \qquad \textbf{for} \quad 0 \le K < \infty$$

$$\angle G_1(s_1)H_1(s_1) = \sum_{k=1}^{m}\angle(s_1+z_k) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j) \qquad = (2i+1)\pi \qquad \textbf{for} \quad K \ge 0$$

5. 예제

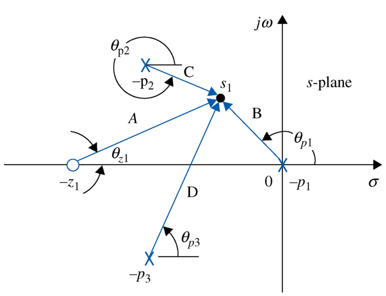
$$G_1(s)H_1(s) = K\frac{(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

- 크기 조건

$$|K| = \frac{|s_1||s_1+p_2||s_1+p_3|}{|s_1+z_1|} = \frac{BCD}{A} \qquad \textbf{for} \quad 0 \le K < \infty$$

- 각도 조건 **for** $K \ge 0$

$$\angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3) = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = (2i+1)\pi$$



3 근궤적 작도법 ($K \geq 0$에 대해서만)

1. 복소평면에 $G_1(s)H_1(s)$의 극과 영점을 표시한다. 폐루프의 근궤적 가지들은 루프전달함수의 극에서 시작하여 루프전달함수의 영점에서 끝난다.

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0$$

2. 실수축 상의 근궤적을 결정한다: 만약 시험점(s)의 오른쪽에 있는 실수 극과 실수 영점의 전체 개수가 홀수 이면, 이 점은 근궤적 상의 점이 된다.
3. 근궤적 가지들의 점근선을 구한다

$$\text{점근선의 각도} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m}$$

$$\text{점근선과 실수축과의 교점의 좌표:}\quad \sigma_a = -\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$$

$$= \frac{\sum(\text{극의 합}) - \sum(\text{영점의 합})}{n-m}$$

4. 이탈점과 복귀점을 구한다: $\frac{dK}{ds} = 0$을 만족하는 점들 중, $K > 0$ 일때 복귀점이나 이탈점이다.

5. 극과 영점에서 근궤적의 출발각도와 도착각도를 결정한다.

$$\begin{aligned}\text{복소극의 출발각도} = &\sum(\text{영점에서 고려중인 복소극까지 벡터 각의 합}) \\ &- \sum(\text{다른 극에서 고려중인 복소극까지 벡터 각의 합}) \\ &- 180^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{복소영점의 도착각도} = &\sum(\text{극에서 고려중인 복소영점까지 벡터 각의 합}) \\ &- \sum(\text{다른 영점에서 고려중인 복소영점까지 벡터 각의 합}) \\ &+ 180^\circ\end{aligned}$$

6. 근궤적과 허수축의 교점을 구한다.
   - Routh 판별법으로 푼다
   - $s = j\omega$를 대입하고 실수부와 허수부를 0으로 둔 다음 ω와 K를 푼다
7. 근궤적을 그린다.
8. 근궤적 가지상에 폐루프의 극을 위치시키고, 해당되는 이득값 K를 크기조건을 사용하여 구한다
9. 예제

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

   a) 루프전달함수 극: 0, -1, -2 $\Rightarrow$ 루프전달함수 영점: ∞, ∞, ∞
   b) 실수축 상의 근궤적: 0과 -1 사이, -2보다 작은 실수축은 근 궤적이다.

c) 근궤적 가지들의 점근선:

$$\text{점근선의 각도} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{3} = \pm 60°, 180°$$

$$\text{점근선과 실수축과의 교점의 좌표:}\ \ \sigma_a = \frac{(0-1-2)-0}{3} = -1$$

d) 이탈점과 복귀점을 구한다:

$$K = -s^3 - 3s^2 - 2s$$
$$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 6s - 2 = -(s+0.423)(s+1.577) = 0$$

$s = -0.423$은 근궤적상의 값이고, 2개의 극 사이에 존재하므로 이탈점이다.

e) 복소극이 없으므로, 출발각, 도착각를 따질 필요가 없음.

f) 근궤적과 허수축의 교점: $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

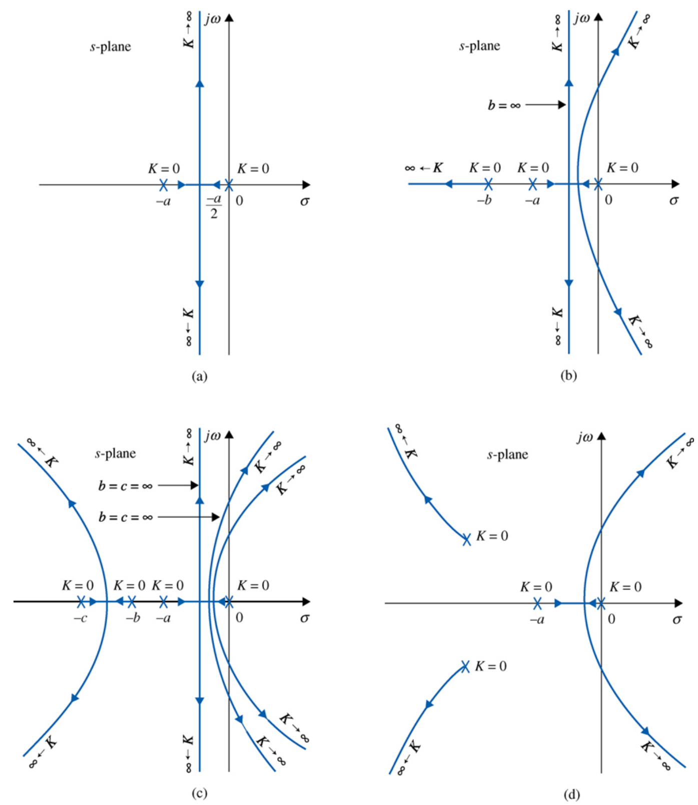
$$\begin{array}{lll} s^3 : 1 & & 2 \\ s^2 : 3 & & K \\ s^1 : \dfrac{6-K}{3} & & \\ s^0 : K & & \end{array}$$

$0 < K < 6$에서만 안정하고, $K = 6$일때 허수축 (s^2의 보조방정식인 $3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0 \to s = \pm\sqrt{2}j$)과 만난다.

g) 근궤적을 그린다.

4 근궤적 작도에 있어서 중요한 점

1. 루프 전달함수 $G(s)H(s)$에 극을 추가하면 근궤적을 전체적으로 우반면으로 이동시킨다.

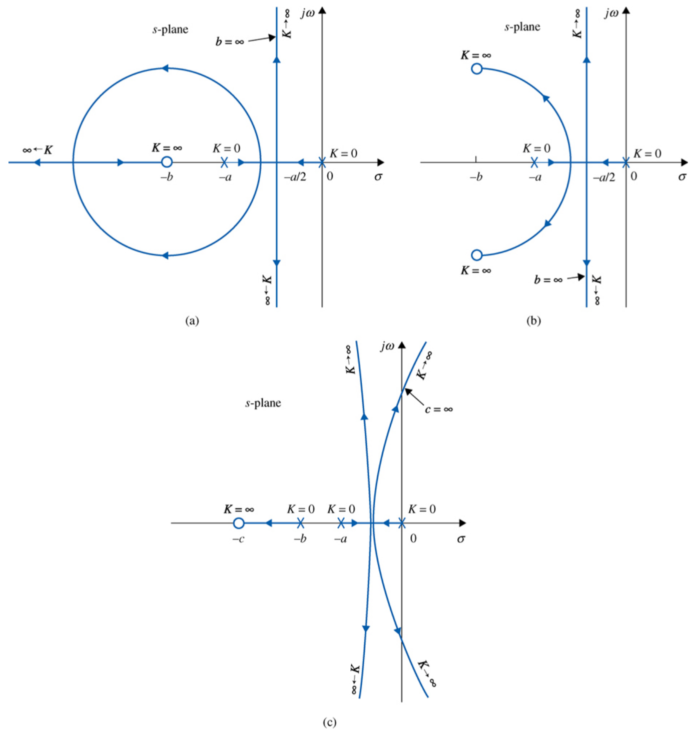


$$(a) \qquad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \qquad a > 0$$

$$(b) \qquad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \qquad b > a > 0$$

$$(c) \qquad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)(s+c)} \qquad c > b > a > 0$$

2. 루프 전달함수 $G(s)H(s)$에 영점을 추가하면 근궤적을 전체적으로 좌반면으로 이동시킨다.



$$(a) \qquad G(s)H(s) = \frac{K(s+b)}{s(s+a)} \qquad a > 0$$

$$(b) \qquad G(s)H(s) = \frac{K(s+b+j\omega_o)(s+b-j\omega_o)}{s(s+a)} \qquad b > a > 0$$

$$(c) \qquad G(s)H(s) = \frac{K(s+c)}{s(s+a)(s+b)} \qquad c > b > a > 0$$

5 근 콘투어 (root contour) : 다중 파라미터의 변화

1. 근 콘투어를 그리기 위하여, 먼저 다음과 같은 2개의 매개변수를 갖는 특성방정식을 고려해 보자

$$P(s) + K_1 Q_1(s) + K_2 Q_2(s) = 0$$

where K_1 and K_2 are the variable parameters

2. 첫번째 단계로 $K_2 = 0$으로 가정하고, K_1의 변화에 따른 근궤적을 그린다.

$$P(s) + K_1 Q_1(s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + K_1 \frac{Q_1(s)}{P(s)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + K_1 G_1(s) H_1(s) = 0$$

3. 두번째 단계로, K_1을 상수로 설정하고, K_2를 매개변수로 설정하여 근 궤적을 덧붙인다.

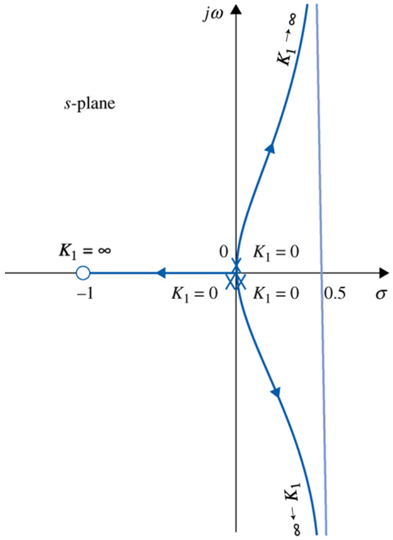
$$1 + K_2 \frac{Q_2(s)}{P(s) + K_1 Q_1(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + K_2 G_2(s) H_2(s) = 0$$

4. 예제

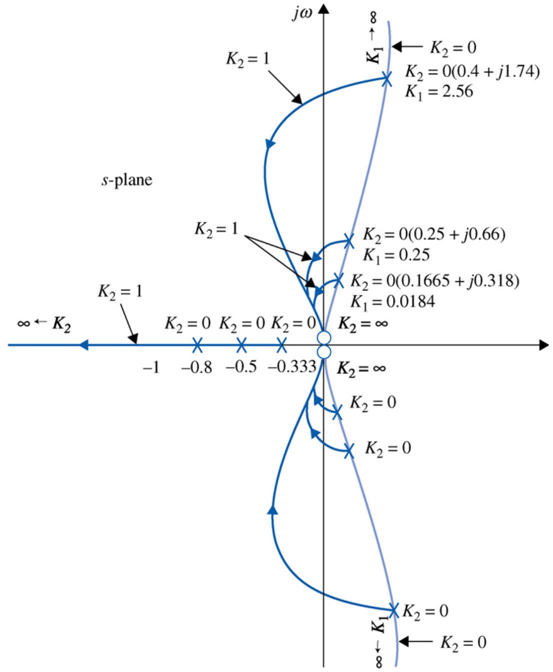
$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

$$(a) \quad K_2 = 0 \quad \rightarrow \quad G_1(s)H_1(s) = \frac{s+1}{s^3}$$

(b) K_2 varies and K_1 is a constant $\quad G_2(s)H_2(s) = \dfrac{s^2}{s^3 + K_1 s + K_1}$



(a)



(b)

한 학기동안 수고 많으셨습니다. 2학기에 봅시다.