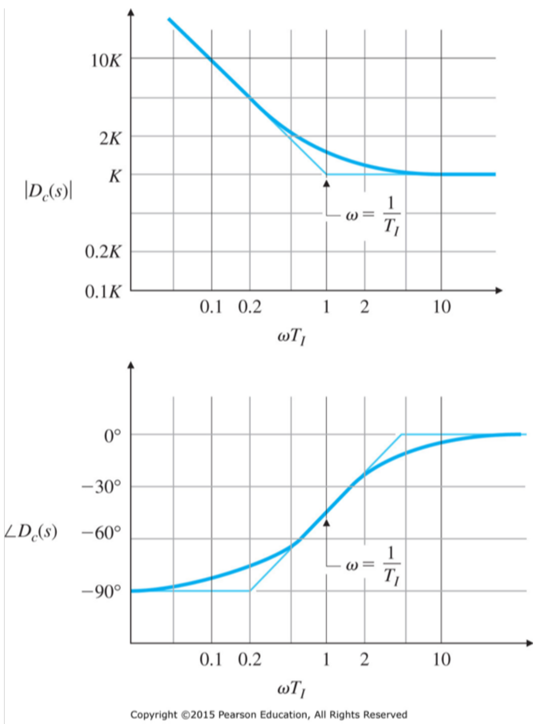
- (6.7.3) PI Compensation

  1. The TF of PI

$$D_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{K}{s}\left(s + \frac{1}{T_I}\right)$$



  2. The desirable aspect of this compensation is the infinite gain at zero frequency, which reduces the steady-state errors. This is accomplished at the cost of a phase decrease at frequencies lower than the breakpoint at $\omega = \frac{1}{T_I}$

  3. Thus, $\frac{1}{T_I}$ is usually located at a frequency less than the crossover frequency so that the system's PM is not affected significantly.

- (6.7.4) Lag Compensation

1. 뒤짐 보상기의 극은 영점의 오른쪽에 위치한다.

$$D_c(s) = \beta \frac{T_I s + 1}{\beta T_I s + 1} \qquad \beta > 1$$

2. 극좌표 선도

$$D_c(j\omega) = \beta \frac{j\omega T_I + 1}{j\omega\beta T_I + 1} \qquad |D_c(j\omega)| = \beta \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_I^2}}{\sqrt{1+\omega^2\beta^2 T_I^2}} \qquad \angle D_c(j\omega) = \tan^{-1}\omega T_I - \tan^{-1}\omega\beta T_I$$

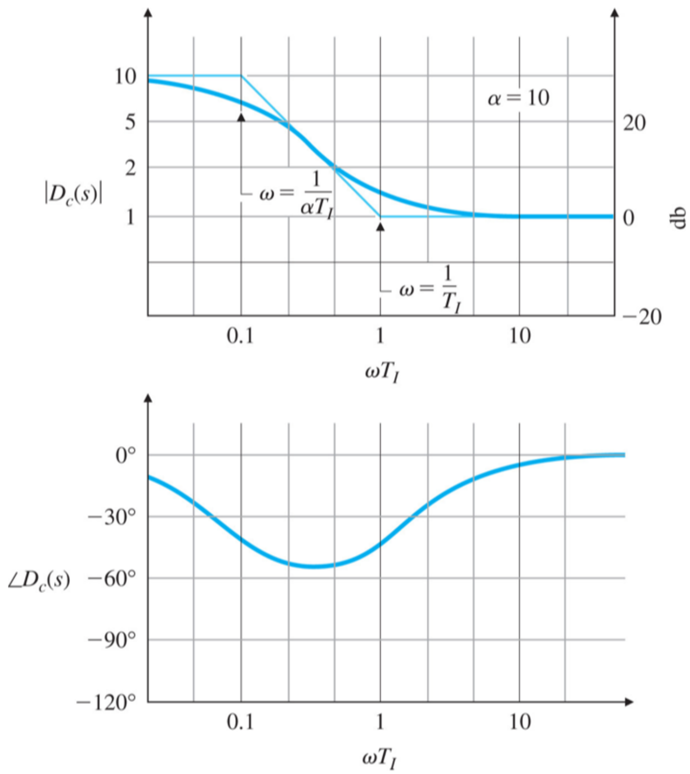
3. $\beta = 10$ 일때의 Bode 선도

$$20\log|D_c(j\omega)| = 20 + 20\log\sqrt{1+\omega^2 T_I^2} - 20\log\sqrt{1+100\omega^2 T_I^2} \qquad \angle D_c(j\omega) = \tan^{-1}\omega T_I - \tan^{-1}10\omega T_I$$

4. 근궤적법에 기초한 뒤짐 보상 기법
   - 시스템의 과도응답 특성은 만족스럽지만, 정상상태 특성이 만족스럽지 못할 때 사용
   - 개루프 이득은 필요한 만큼 그리고 가능한 만큼 증가시키는 것이 좋다
   - 근궤적이 크게 변화하는 것을 피하기 위하여 뒤짐보상기의 각도 기여는 5도 정도 작은 양으로 제한되어야 한다.
   - 뒤짐 보상기의 극과 영점을 s평면의 원점 부근에서 서로 가깝게 배치한다. 그러면

$$|D_c(s_1)| \approx 1$$

   여기서 s_1은 주요 페루프 극이다. $|D_c(s_1)| \approx 1$ 특성은 과도응답특성은 변하지 않게 하지만, 개루프 전달 함수의 전체 이득은 β만큼 증가시킨다.



5. 근궤적법에 기초한 뒤짐 보상 기법 설계과정

a) $G(s)$의 근궤적선도를 그리고, 과도응답특성을 기초로 주요 폐루프 극의 위치를 표시한다

b) $G_c(s) = K_c D_c(s) = K_c \beta \frac{T_I s+1}{\beta T_I s+1}$

c) 주어진 정적 오차상수로 부터 필요한 $K_c\beta$를 결정한다. 예를 들어, 속도오차상수가 주어진다면

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

d) 극과 영점을 결정한다. (T_I를 결정)

e) 크기 조건으로 K_c 결정한다.

(Example 1) $G(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$, 주요 페루프 극이 $-0.33 \pm j0.58$이며, 이를 변화시키지 않으면서 $K_v = 5$로 증가시키는 보상기를 설계하라?

(Solution)

a) 뒤짐 보상기 $G_c(s) = K_c\beta\frac{T_I s+1}{\beta T_I s+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T_I}}{s+\frac{1}{\beta T_I}}$를 사용

b) 정적 속도오차상수

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = K_c\beta\frac{1.05}{2} = 5 \qquad \to \qquad K_c\beta = 9.524$$

c) 근궤적을 변화시키지 않으면서, 극 영점 결정하기

$$-5^\circ < \angle G_c(-0.33 + j0.58) < 0^\circ$$
$$-5^\circ < \tan^{-1}\frac{0.58}{\frac{1}{T_I} - 0.33} - \tan^{-1}\frac{0.58}{\frac{1}{\beta T_I} - 0.33} < 0^\circ$$

$\beta = 10$와 $T_I = 20$으로 시도하면, 다음을 만족한다

$$-5^\circ < \angle G_c(-0.33 + j0.58) < 0^\circ$$
$$-5^\circ < -3.5^\circ < 0^\circ$$

d) $K_c = 0.9524$이다

e) 설계된 뒤짐보상기

$$G_c(s) = 0.9524\frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

6. 주파수응답 접근법에 기초를 둔 뒤짐보상 설계

a) 뒤짐 보상기 $G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_I}}{s+\frac{1}{\beta T_I}}$

$$G_c(s)G(s) = K_c\beta \frac{T_I s + 1}{\beta T_I s + 1} G(s) = \frac{T_I s + 1}{\beta T_I s + 1} G_1(s) \qquad G_1(s) = K_c\beta G(s)$$

정적 오차상수를 만족하도록 $K_c\beta$를 결정한다

b) $G_1(s)$의 **Bode** 선도를 그리고, 개루프 전달함수의 위상각이 요구되는 위상여유 (5 $\sim$ 10° 더 크게 잡는다)나 혹은 $-180°$의 합과 같게되는 주파수를 찾는다. 이를 새로운 '이득교차주파수'로 설정

c) 뒤짐 보상기의 극과 영점이 새로운 이득교차주파수 보다 작아야 한다. 절점 주파수 $\omega = \frac{1}{T_I}$를 새로운 이득교차주파수의 $\frac{1}{10}$ 정도로 잡는다.

d) 새로운 이득교차주파수에서 크기 곡선을 **0db**로 끌오내리는데 필요한 감소량을 결정한다. 이 감소량이 $-20\log\beta$인 것으로 부터 β를 결정한다

e) β로 부터 K_c를 결정한다.

(Example 2) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$, $K_v = 5$, $PM = 40°$를 가지게 하는 보상기를 설계하라?

(Solution)

a) $G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_I}}{s+\frac{1}{\beta T_I}}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} K_c \frac{s+\frac{1}{T_I}}{s+\frac{1}{\beta T_I}} \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)} = K_c\beta = 5$$

그러므로

$$G_1(s) = K_c\beta G(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

b) 목표 위상여유가 40도이므로 10도를 더하여 50도를 위상여유로 잡아서 새로운 이득교차주파수를 찾는다.

$$\angle G_1(j\omega_g) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega_g - \tan^{-1}0.5\omega_g = -130^\circ$$

이를 풀면

$$\tan^{-1}\omega_g + \tan^{-1}0.5\omega_g = 40^\circ \qquad \frac{\omega_g + 0.5\omega_g}{1-0.5\omega_g^2} = 0.84 \qquad \omega_g = 0.492 \approx 0.5$$

c) $\omega_g = 0.5$로 부터 $\frac{1}{T_I} = \frac{1}{10}\omega_g = 0.05$로 선정. 그러므로 $T_I = 20$

d) 이득교차주파수에서 크기 = 0 이 되기 위한 β 결정 필요

$$\begin{aligned} 20\log|G_1(j\omega_g)| &= 20\log 5 - 20\log\omega_g - 20\log\sqrt{1+\omega_g^2} - 20\log\sqrt{1+0.25\omega_g^2} \\ &= 14-(-6)-(1.9)-(0.5) \approx 17.6[db] \quad \rightarrow \quad -20\log\beta = -17.6 \quad \rightarrow \quad \beta = 7.59 \end{aligned}$$

e) $K_c = 0.66$

f) $G_c(s) = 0.66\frac{s+0.05}{s+0.0066}$

7. 뒤짐 보상기에 대한 참고사항
   a) 뒤짐보상기는 기본적으로 저주파통과필터이다. 저주파수에서 높은 이득이 가능하고, 고주파수의 임계구역에서 이득을 낮춤으로서 위상여유를 개선한다.
   b) 뒤짐 보상기는 시스템의 대역폭을 줄이고, 과도응답을 느리게 한다.
   c) 비례-적분 제어기와 비슷한다. 이때문에 보상된 시스템은 안정성이 나빠지려는 경향이 있다. 시정수 T_I를 시스템의 시정수 보다 충분히 크게 해야 한다.
8. PI 제어와의 유사성

$$G_c(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

   a) $s = -\frac{1}{T_I}$에 영점을, $s = 0$에 극을 가진다
   b) 주파수가 0인 점에서 무한이득을 가진다. 그러므로 정상상태 특성이 개선된다.
   c) 분모차수의 증가 (극의 추가)로 시스템의 상대안정도가 나빠진다. 그리고 응답속도가 느려진다.
9. (Example 6.18) try it !

10. **(Example 6.19)** $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $K_v = 10$, $PM = 45°$를 가지게 하는 보상기를 설계하라?

(Solution)

a) $G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_I}}{s+\frac{1}{\beta T_I}}$

$$K_v = \lim_{s \to 0} K_c \frac{s + \frac{1}{T_I}}{s + \frac{1}{\beta T_I}} \frac{1}{(s+1)} = K_c \beta = 10$$

그러므로

$$G_1(s) = K_c \beta G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

b) 목표 위상여유가 45도이므로 5도를 더하여 50도를 위상여유로 잡아서 새로운 이득교차주파수를 찾는다.

$$\angle G_1(j\omega_g) = -90° - \tan^{-1}\omega_g = -130° \qquad \omega_g = 0.84$$

c) $\omega_g = 0.84$로 부터 $\frac{1}{T_I} = \frac{1}{10}\omega_g = 0.084$로 선정. 그러므로 $T_I = 12$

d) 이득교차주파수에서 크기 = 0 이 되기 위한 β 결정 필요

$$\begin{aligned} 20\log|G_1(j\omega_g)| &= 20\log 10 - 20\log\omega_g - 20\log\sqrt{1+\omega_g^2} \\ &= 20 - (-1.5) - (4.6) \approx 17[db] \quad \rightarrow \quad -20\log\beta = -17 \quad \rightarrow \quad \beta = 7.1 \end{aligned}$$

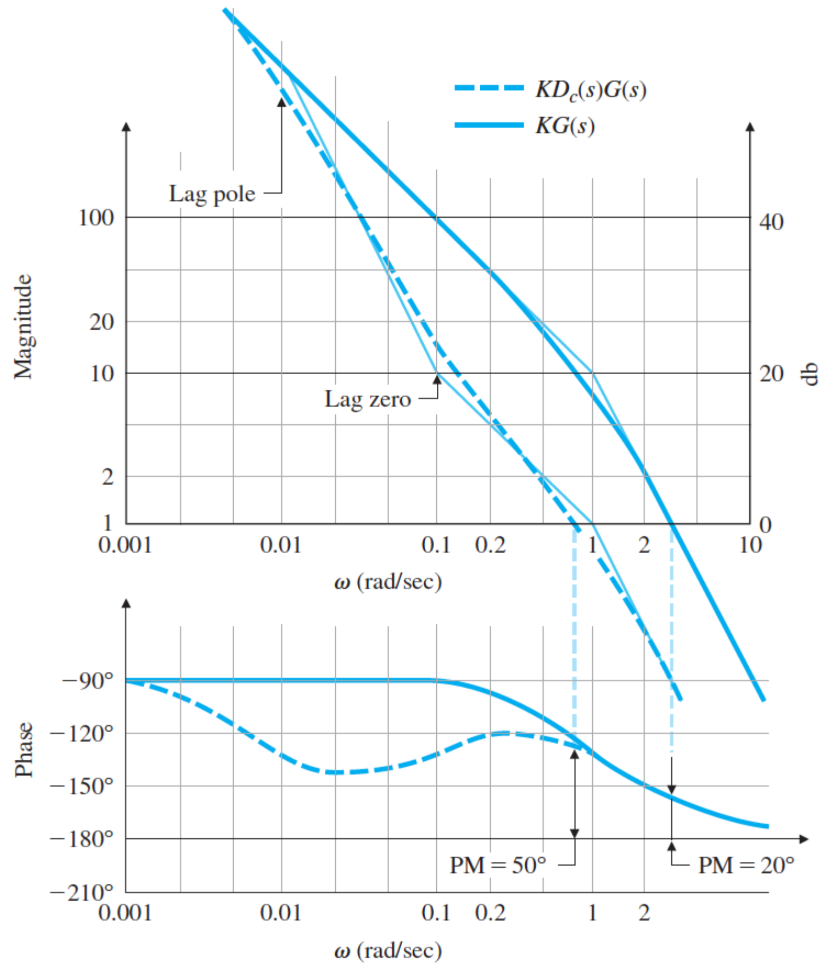
e) $K_c = 1.4$

f) $G_c(s) = 1.4\frac{s+0.084}{s+0.012} = 10\frac{12s+1}{83s+1}$

Let us reconsider the design result of

$$G_c(s) = 1.4\frac{s+0.084}{s+0.012} = 10\frac{12s+1}{83s+1} \qquad \rightarrow \qquad G_c(s) = 10\frac{10s+1}{100s+1} = \frac{s+0.1}{s+0.01}$$

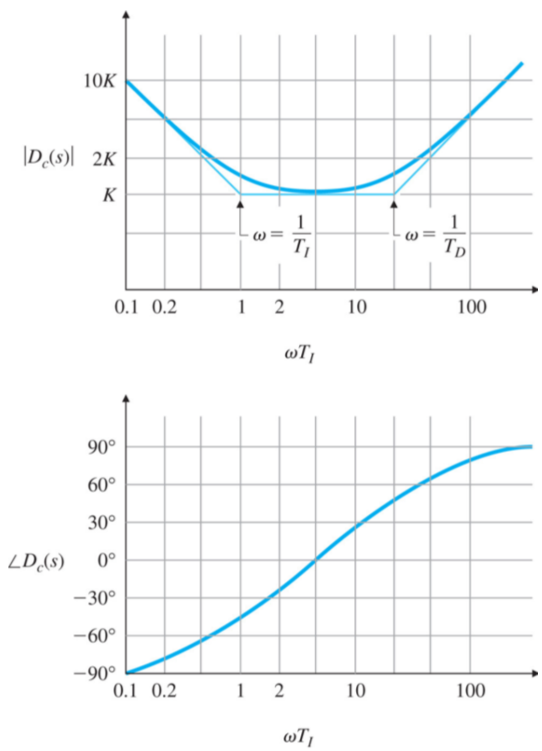
Figure 6.64
Frequency response of lag-compensation design in Example 6.19



- (6.7.5) PID Compensation

  1. By combining PD and PI controls, we can get the following PID control form:

$$D_c(s) = \frac{K}{s}\left[(T_D s + 1)\left(s + \frac{1}{T_I}\right)\right]$$



  2. This compensation is roughly equivalent to combining lead and lag compensators in the same design, and so is sometimes referred to as a lead-lag compensator.
  3. It can provide simultaneous improvement in transient nd steady-state response.
  4. (Example 6.20)

- Lead-Lag Compensation

1. 앞섬 보상은 기본적으로 대역폭을 증가시키고, 응답속도를 빠르게 하며, 계단응답에서의 오버슈트를 감소시킨다.
2. 뒤짐 보상은 저주파 이득을 증가시킴으로 정상상태 정확도를 증가시킨다. 그러나 대역폭이 감소하여 응답속도가 느려진다.
3. 과도응답과 정상상태응답을 모두 개선시키려면 앞섬과 뒤짐 보상을 동시에 사용하여야 한다.
4. 뒤짐-앞섬 보상기의 특징
   - 전달함수

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad 0<\alpha<1 \quad \textbf{and} \quad \beta>1$$

   설계의 편의를 위해 일반적으로 $\alpha\beta = 1$로 가정한다.
   - $K_c = 1$, $\alpha\beta = 1$일때 극좌표 선도

$$|G_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+\frac{1}{T_1^2}}\sqrt{\omega^2+\frac{1}{T_2^2}}}{\sqrt{\omega^2+\frac{\beta^2}{T_1^2}}\sqrt{\omega^2+\frac{1}{\beta^2T_2^2}}}$$

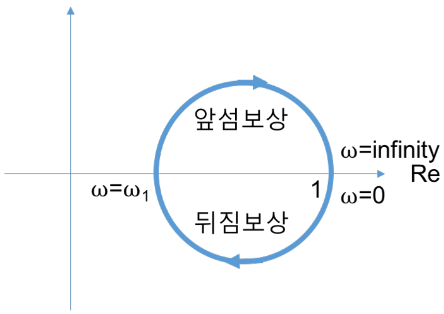
$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2 - \tan^{-1}\frac{\omega T_1}{\beta} - \tan^{-1}\beta\omega T_2$$

   위상각이 0도가 되는 주파수 ω_1 찾기 ?

$$\tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2 = \tan^{-1}\frac{\omega T_1}{\beta} + \tan^{-1}\beta\omega T_2 \qquad \frac{\omega(T_1+T_2)}{1-\omega^2T_1T_2} = \frac{\omega(\frac{T_1}{\beta}+\beta T_2)}{1-\omega^2T_1T_2}$$

$$1-\omega^2T_1T_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1T2}}$$

* if $0 < \omega < \omega_1$, then 뒤짐 보상기 역할
* if $\omega_1 < \omega < \infty$, then 앞섬 보상기 역할

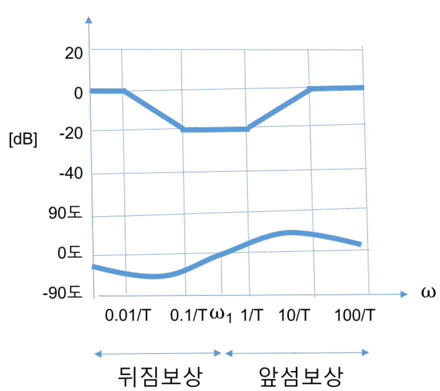


– $K_c = 1,\ \alpha = 0.1, \beta = 10,\ T_2 = 10T, T_1 = T$일때 **Bode 선도**

$$G_c(s) = \left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{10}{T}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{10T}}{s+\frac{1}{100T}}\right)$$

$$20\log|G_c(j\omega)| = 20\log\sqrt{\omega^2T^2+1} + 20\log\sqrt{\omega^2T^2+0.01} - 20\log\sqrt{\omega^2T^2+100} - 20\log\sqrt{\omega^2T^2+0.0001}$$

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}\omega T + \tan^{-1}10\omega T - \tan^{-1}0.1\omega T - \tan^{-1}100\omega T$$



5. 근궤적법에 기초를 둔 뒤짐-앞섬 보상기 설계 ($\alpha\beta = 1$인 경우)

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \qquad \beta > 1$$

a) 성능 사양으로 부터 주요 폐루프 극의 요구되는 위치 s_1 를 결정한다

b) 오차 상수가 정의되어 있다면, 이를 이용하여 K_c를 결정한다. 예를들어 속도오차상수가 정의되어 있다면

$$K_v = \lim_{s \to 0} s G_c(s) G(s)$$

c) 주요 폐루프극에서 $G(s_1)$의 부족각 ϕ를 결정한다.

d) $\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| = 1$ (뒤짐 보상의 영향이 없다)는 가정하에, 주요 폐루프 극의 위치 s_1에서

$$\left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} G(s_1) \right| = 1 \qquad\qquad \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} = \phi + 5^\circ$$

위의 2 조건으로 부터 T_1과 β를 결정한다.

e) β를 가지고 다음의 2 조건으로 부터 T_2를 결정한다.

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| = 1 \qquad\qquad -5^\circ < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0$$

(Example 1) $G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$, $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 5$, $K_v = 80$이 되도록 보상기를 설계하라?

(Solution)

a) 주요 폐루프 극 $s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.5 + j4.33$

b) 속도오차상수로 부터

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = K_c\frac{4}{0.5} = 8K_c = 80 \qquad \rightarrow \qquad K_c = 10$$

c) 주요 폐루프극에서 $G(-2.5+j4.33)$의 부족각 ϕ를 결정한다.

$$\angle G(-2.5+j4.33) = \angle\frac{4}{(-2.5+j4.33)(-2+j4.33)} = -120^\circ - 114^\circ = -180^\circ - \phi \qquad \rightarrow \qquad \phi = 54^\circ$$

d) $\left|\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right| = 1$ 가정, 즉 $T_2 \gg 1$이면 가정이 만족될 수 있다. 주요 폐루프 극의 위치 s_1에서

$$\left|10\frac{-2.5+j4.33+\frac{1}{T_1}}{-2.5+j4.33+\frac{\beta}{T_1}}\frac{4}{(-2.5+j4.33)(-2+j4.33)}\right| = 1 \qquad \frac{\sqrt{(2.5-1/T_1)^2+4.33^2}}{\sqrt{(2.5-\beta/T_1)^2+4.33^2}} = 0.635$$

$$\angle\frac{-2.5+j4.33+\frac{1}{T_1}}{-2.5+j4.33+\frac{\beta}{T_1}} = 59^\circ \qquad -\tan^{-1}\frac{4.33}{2.5-1/T_1} + \tan^{-1}\frac{4.33}{2.5-\beta/T_1} = 59^\circ$$

위의 **2** 조건으로 부터 T_1과 β를 결정한다.

e) β를 가지고 다음의 **2** 조건으로 부터 T_2를 결정한다.

$$\left|\frac{-2.5+j4.33+\frac{1}{T_2}}{-2.5+j4.33+\frac{1}{\beta T_2}}\right| = 1 \qquad -5^\circ < \angle\frac{-2.5+j4.33+\frac{1}{T_2}}{-2.5+j4.33+\frac{1}{\beta T_2}} < 0$$

6. 주파수응답에 기초를 둔 뒤짐-앞섬 보상기 설계 ($\alpha\beta = 1$인 경우)
(Example 2) $G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$, $K_v = 10$, $PM = 50°$ 이상을 보장하는 보상기를 설계하라?
(Solution)

a) **From** $K_v = 10$,

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = K_c\frac{20}{2} = 10K_c = 10 \qquad \rightarrow \qquad K_c = 1$$

b) **Bode plot of** $G_1(s) = K_cG(s) = G(s)$

$$|G(j\omega)| = \frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \qquad\qquad \angle G(j\omega) = -90° - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

새로운 이득교차주파수 ω_g 선정

$$\tan^{-1}\omega_g + \tan^{-1}\frac{\omega_g}{2} = 90° \qquad\qquad \frac{1.5\omega_g}{1-0.5\omega_g^2} = \infty \qquad\qquad \omega_g = \sqrt{2} = 1.414$$

뒤짐 보상기의 절점 주파수 $\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_g}{10} = 0.1414$로 선정: $T_2 = 7.07$
$\omega_g = 1.414$에서 $PM = 50°$이어야 하므로, 위상 앞섬은 $\phi_m = 55°$

$$\sin\phi_m = \frac{\beta-1}{\beta+1} \qquad \rightarrow \qquad \beta = 10$$

뒤짐보상기는

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} = \frac{s+0.1414}{s+0.01414}$$

c) $\omega_g = 1.414$에서

$$|G(j\omega_g)| = \frac{20}{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+1}\sqrt{\omega_g^2+4}} = 3.33 \qquad \rightarrow \qquad 10.45[db]$$

그러므로 ω_g에서 $\left|\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{10}{T_1}}\right| = \frac{1}{3.33}$이 되어야 한다.

$$\frac{\sqrt{\omega_g^2+\frac{1}{T_1^2}}}{\sqrt{\omega_g^2+\frac{100}{T_1^2}}} = \frac{1}{3.33} \qquad \rightarrow \qquad T_1 = 2.03$$

앞섬보상기는

$$\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} = \frac{s+0.4764}{s+4.764}$$

d) 뒤짐-앞섬보상기는

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) = \frac{s+0.4764}{s+4.764}\frac{s+0.1414}{s+0.01414}$$

(6장 숙제) 71개의 문제 중 10개 풀어 중간고사 시험 직전 제출