# 7 Compensation

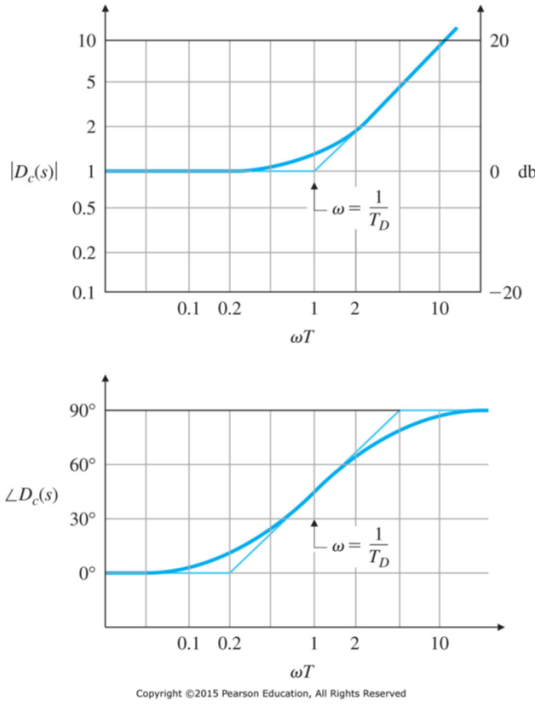
- Lead compensator, which approximates the PD
- Lag compensator, which approximates the PI
- Notch compensator, which has special characteristics for dealing with resonances.
- Characteristic equation of the closed-loop control system

$$1 + KD_c(s)G(s) = 0$$

where $L(s) = KD_c(s)G(s)$ is called as "loop gain" or "open-loop" transfer function of the system.

- (6.7.1) PD Compensation
  1. The TF of PD

$$D_c(s) = T_D s + 1$$

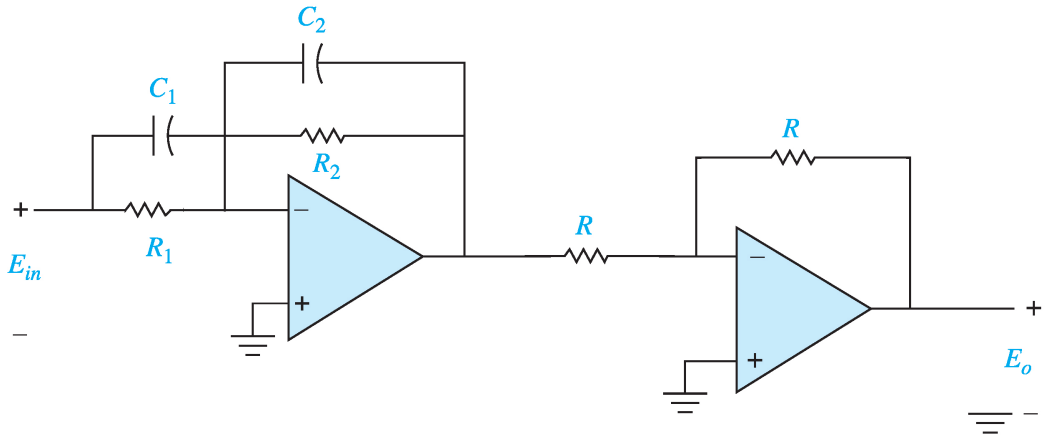


Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

  2. This compensation is used by locating $1/T_D$ so that the increased phase occurs in the vincinity of crossover, thus increasing the PM.
  3. The magnitude of the compensation continues to grow with increasing frequency. This feature is undesirable because it amplifies the high-frequency noise that is typically present in any real system.

- (6.7.2) Lead Compensation

1. 연산증폭기를 이용한 전자식 회로망, 전기식 RC 회로망, 기계식 스프링-감쇠기 등으로 구현할 수 있다. 예를 들어 RC회로망을 이용하여 구현한 앞섬보상 예제는 다음과 같다.




[그림 9-26] $G(s) = K_c \frac{s+z_1}{s+P_1}$ 의 op 앰프회로 구현.

앞섬보상기의 아날로그 회로 구현 계산 예는 다음과 같다

$$\frac{0-E_i}{R_1} + \frac{0-E_i}{1/(C_1 s)} + \frac{0-(-E_o)}{R_2} + \frac{0-(-E_o)}{1/(C_2 s)} = 0$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1+R_1C_1 s}{1+R_2C_2 s} = \frac{C_1}{C_2}\frac{\frac{1}{R_1C_1}+s}{\frac{1}{R_2C_2}+s}$$

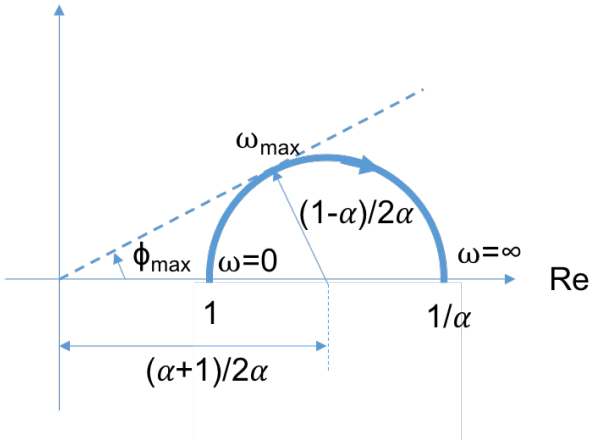
$$G_c(s) = K_c\frac{s+z_1}{s+p_1} \qquad K_c = \frac{C_1}{C_2} \quad z_1 = \frac{1}{R_1C_1} \quad p_1 = \frac{1}{R_2C_2}$$

2. 앞섬 보상기의 특성

$$D_c(s) = \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1} \qquad 0 < \alpha < 1$$

- $0 < \alpha < 1$ 이므로 영점이 항상 극의 오른쪽에 위치한다
- 극좌표 선도

$$D_c(j\omega) = \frac{j\omega T_D + 1}{j\omega \alpha T_D + 1} \qquad |D_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{T_D^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 T_D^2 \omega^2 + 1}} \qquad \angle D_c(j\omega) = \tan^{-1} T_D\omega - \tan^{-1} \alpha T_D \omega$$




양의 실수축과 원점으로부터 반원에 그은 접선각은 최대위상각 $\phi_{max}$이 된다. 접선에서의 주파수를 $\omega_{max}$이라고 하면, 접선각 $\phi_{max}$은 다음을 만족한다

$$\therefore \qquad \sin\phi_{max} = \frac{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}}$$

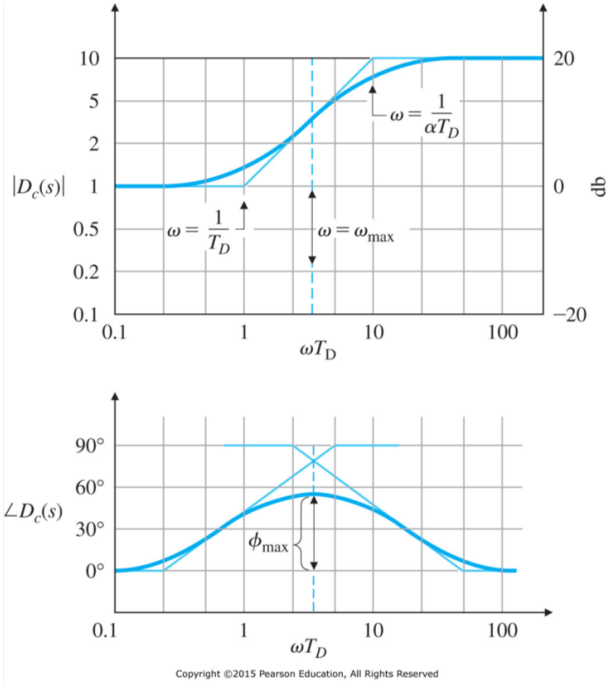
이는 최대위상 앞섬각(**maximum phase lead**)과 $\alpha$와의 관계를 나타낸다.

– $\alpha = 0.1$인 경우, **Bode** 선도

$$D_c(j\omega) = \frac{j\omega T_D + 1}{0.1 j\omega T_D + 1}$$

$$20\log|D_c(j\omega)| = 20\log\sqrt{T_D^2\omega^2 + 1} - 20\log\sqrt{0.01T_D^2\omega^2 + 1}$$

$$\angle D_c(j\omega) = \tan^{-1} T_D\omega - \tan^{-1} 0.1T_D\omega$$




사실, $\omega_{max}$은 두 개의 절점 주파수의 기하 평균이다 (로그 스케일에서의 산술평균과 동일하다)

$$\log\omega_{max} = \frac{\log\frac{1}{T_D} + \log\frac{1}{\alpha T_D}}{2} \qquad \therefore \qquad \omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_D}$$

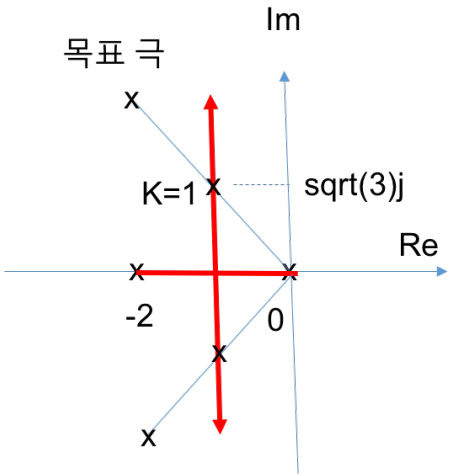
3. 앞섬 보상기는
   a) 기본적으로 고주파통과필터이다. 고주파 잡음의 영향을 받는다
   b) 과도응답을 상당히 개선시킬 수 있다.
4. 근궤적법에 기본을 둔 앞섬 보상기법 : 설계에 있어서 시간영역 성능사양 즉, 요구되는 페루프의 감쇠비, 비감쇠고유진동수, 최대오버슈트, 상승시간, 정착시간 등으로 주어질 때 대단히 효과적이다. 설계과정은 다음과 같다
   a) 성능사양으로부터 주요 페루프 극의 요구되는 위치를 결정한다.
   b) 근궤적선도를 작도하고, 이득조절만으로 요구되는 페루프 극을 만들어 낼 수 있는지 확인한다. 그렇지 못하면 부족각($\phi$)를 산출한다.
   c) 앞섬 보상기 $K_c D_c(s) = K_c \frac{T_D s+1}{\alpha T_D s+1}$ with $0 < \alpha < 1$에서 $\alpha, T_D$는 부족각을 가지고 산출한다. $K_c$는 개루프 이득조건으로 얻는다.

**(Example 1)** $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$를 가지고 폐루프 시스템이 $\zeta = 0.5$ **and** $\omega_n = 4$가 되도록 보상기를 설계?

**(Solution)**

a) 요구되는 주요 폐루프 극 : $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j = -2 \pm 2\sqrt{3}j$

b) 주어진 $G(s)$의 근궤적선도 : $K = 1$일 때 $1 + KG(s) = 0$의 폐루프 극은 $s^2 + 2s + 4 = 0$으로 부터 $-1 \pm \sqrt{3}j$




c) 이득조절만으로 요구되는 폐루프 극을 만들어 낼 수 없다. 그러므로 부족각($\phi$)를 산출하자

$$\angle G(s)|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = \angle\frac{4}{(-2+2\sqrt{3}j)(\sqrt{3}j)} = -120^\circ - 90^\circ = -210^\circ$$

이므로 $\angle K_c D_c(s)G(s) = -180^\circ$가 되기 위해서는 $\phi = 30^\circ$이 부족하다.

d) 목표 앞섬위상각을 부족각 보다 크게 $\phi_{max} = 35^\circ$로 설정하자

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.574 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}} = 0.27$$

e) 앞섬 보상기의 위상각을 $\phi = 30°$가 되도록 $T_D$ 설계하자 **with** $\alpha = 0.27$

$$\begin{aligned}\phi &= \angle D_c(s) \\ &= \angle \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1}\Big|_{s=-2+2\sqrt{3}j} \\ &= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}T_D}{-2T_D+1} - \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}\alpha T_D}{-2\alpha T_D+1} = 30° \qquad \rightarrow \qquad T_D = 1.4\end{aligned}$$

f) 위에서 결정된 $T_D$ **and** $\alpha$를 가지고 $K_c D_c(s) = K_c \frac{1.4s+1}{0.38s+1}$의 크기를 결정하자

$$|K_c D_c(s) G(s)| = K_c \left| \frac{1.4s+1}{0.38s+1} \cdot \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \qquad \rightarrow \qquad K_c \approx 0.9$$

5. 주파수 응답법에 기초를 둔 앞섬보상 기법

a) 주어진 오차상수 요구조건으로 부터 앞섬보상기의 $K_c$를 결정한다.

$$G_c(s) = K_c D_c(s) = K_c \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1}$$

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1} G(s) = \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1} G_1(s) \qquad \rightarrow \qquad G_1(s) = K_c G(s)$$

b) $G_1(s)$의 Bode를 그리고 위상여유를 평가한다

c) 추가될 위상 앞섬각 $\phi_{max}$를 결정한다. (부족각 보다 $5^\circ \sim 6^\circ$ 정도 크게 설정)

d) 감쇠인자 $\alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}}$를 결정한다.

e) $|G_1(j\omega)| = \sqrt{\alpha}$가 되는 곳의 주파수를 결정한다. 이를 새로운 "이득교차주파수" $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_D}$으로 결정하며, 이 주파수에서 최대 위상각 $\phi_{max}$이 발생한다.

f) 이득여유를 확인한다.

**(Example 2)** $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$를 가지고 속도오차상수 $K_v = 20$, $PM = 50°$, $GM \geq 10db$이 되도록 보상기를 설계하라?

**(Solution)**

**a)** 속도오차상수로 부터 $K_c$ 구하기

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = 2K_c = 20 \qquad \rightarrow \qquad K_c = 10$$

**b)** $G_1(s) = K_cG(s) = \frac{40}{s(s+2)}$ 의 위상여유 구하기

$$20\log|G_1(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_g = 6.17$$

$$\angle G_1(j\omega_g) = -90° - \tan^{-1}\frac{\omega_g}{2} = -162° \qquad \rightarrow \qquad PM = 18°$$

**c)** 추가될 위상 앞섬각 $\phi = 32°$ 이 되어야 한다. $\phi_{max} = 38°$로 잡자.

**d)** 감쇠인자 $\alpha$를 결정한다.

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.616 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}} = 0.24$$

**e)** $|G_1(j\omega_{max})| = \sqrt{\alpha} = 0.49$가 되는 곳의 주파수를 새로운 "이득교차주파수" $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_D}$으로 결정하며, 이 주파수에서 최대 위상각 $\phi_{max}$이 발생한다.

$$|G_1(j\omega_{max})| = \frac{40}{\omega_{max}\sqrt{\omega_{max}^2+4}} = 0.49 \qquad \rightarrow \qquad \omega_{max} = 8.92 \qquad \rightarrow \qquad T_D = 0.23$$

**f)** $G_c(s) = 10\frac{0.23s+1}{0.055s+1}$를 이용하여 이득여유를 확인한다.

6. **(Example 6.15)** $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$에 대하여 다음 2조건을 만족하도록 앞섬 보상기를 설계하라?
   1) steady-state error of less than 0.1 for a unit-ramp input
   2) maximum overshoot $M_p < 25\%$

   (Solution)

   a) 속도오차상수로 부터 $K_c$ 구하기

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = K_c \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{K_c} \le 0.1 \qquad \rightarrow \qquad K_c = 10$$

   where lead compensator is

$$G_c(s) = K_c D_c(s) = K_c \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1}$$

   b) $G_1(s) = K_c G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ 의 위상여유 구하기

$$20\log|G_1(j\omega)| = 20\log 10 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\omega^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_g = 3.08$$
$$\angle G_1(j\omega_g) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega_g = -162^\circ \qquad \rightarrow \qquad PM = 18^\circ$$

   c) 댐핑으로 부터 목표 PM 구하기

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.25 \qquad \rightarrow \qquad \zeta > 0.4 \qquad \rightarrow \qquad PM = 55^\circ$$

   d) 추가될 위상 앞섬각 $\phi = 37^\circ$ 이 되어야 한다. $\phi_{max} = 42^\circ$로 잡자.

e) 감쇠인자 $\alpha$를 결정한다.

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.67 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}} \approx 0.2$$

f) $|G_1(j\omega_{max})| = \sqrt{\alpha} = 0.447$가 되는 곳의 주파수를 새로운 "이득교차주파수" $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_D}$으로 결정하며, 이 주파수에서 최대 위상각 $\phi_{max}$이 발생한다.

$$|G_1(j\omega_{max})| = \frac{10}{\omega_{max}\sqrt{\omega_{max}^2+1}} = 0.447 \qquad \rightarrow \qquad \omega_{max} = 4.78 \qquad \rightarrow \qquad T_D \approx 0.5$$

g) $G_c(s) = 10\frac{0.5s+1}{0.1s+1}$를 이용하여 이득여유를 확인한다.

7. (Example 6.16)

8. (Example 6.17)